

Tentamen Inleiding Kansrekening TW1080.

30 juli 2014, 9:00-12:00

- Het tentamen bestaat uit 20 onderdelen. Met elk onderdeel kan maximaal 2 punten verdiend worden.
 - Het eindcijfer x wordt berekend als een gewogen gemiddelde van het gemiddelde huiswerkcijfer y en het tentamencijfer z , via $x = y(3/10) + z(7/10)$, zoals uitgelegd is op blackboard.
 - Er mag gebruik gemaakt worden van een A4 aan beide zijden beschreven formuleblad, naar eigen keuze samen te stellen.
 - Er mag gebruik gemaakt worden van een (mogelijk grafische) rekenmachine.
-

1. We beschouwen drie vragen waarvan het antwoord ja of neen kan zijn. De antwoorden op deze drie vragen worden gemodelleerd door drie Bernoulli verdeelde stochasten X , Y en Z . De interpretatie is dat $X = 1$ (resp. $X = 0$) betekent dat het antwoord op vraag 1 ja (resp. neen) is, en analoog voor vraag 2 (corresponderend met Y) en vraag 3 (corresponderend met Z). Verder is gegeven

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = 1) = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}(X = 1|Z = 1) = \frac{1}{4}$$

- a) Bereken de kans $\mathbb{P}(X = 1 \cap Z = 1)$
- b) Bereken de kans dat precies één van de gebeurtenissen $X = 1$ of $Y = 0$ optreden.
- c) Bereken de conditionele kans $\mathbb{P}(Z = 1|X = 1)$.
- d) Zijn X en Y onafhankelijk? Beargumenteer uw antwoord.

e) Bewijs de ongelijkheid

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \leq \mathbb{P}(X \neq Z) + \mathbb{P}(Z \neq Y)$$

Dit is de zogenaamde Bell ongelijkheid.

2. De continue stochast X heeft kansdichtheid gegeven door

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2) & \text{indien } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (1)$$

- a) Bereken de verwachting $\mathbb{E}(X)$ en de variantie $\text{Var}(X)$.
- b) Bereken de functie $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zodanig dat voor U , een uniform verdeelde stochast op het interval $[0, 1]$, $g(U)$ verdeeld is zoals X met kansdichtheid gegeven door (1).
- c) We beschouwen nu een rij stochasten $X_n, n = 1, 2, \dots$ die onafhankelijk zijn en verdeeld zoals (1). Toon aan dat $\mu \in \mathbb{R}$ en $\sigma^2 \in [0, \infty)$ bestaan zodanig dat

$$\frac{1}{\sqrt{N\sigma^2}} \sum_{i=1}^N (X_i^2 - \mu)$$

in verdeling convergeert naar een standaard normaal verdeelde stochast, en bereken deze μ en σ^2 .

- d) We beschouwen dezelfde rij als in onderdeel c). Bewijs dat

$$Y_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i X_{i+1}$$

in kans convergeert naar een constante als $N \rightarrow \infty$. (Hint: toon aan dat $\text{cov}(X_i X_{i+1}, X_j X_{j+1})$ gelijk is aan nul voor $|i - j| > 1$, en gebruik dit om aan te tonen dat de variantie van Y_N naar nul convergeert als $N \rightarrow \infty$.)

- e) Bereken de kans dat precies 5 van de eerste honderd $X_1, \dots, X_{100}$ kleiner of gelijk zijn aan $1/10$ (de stochasten X_i zijn hier weer onafhankelijk en verdeeld met kansdichtheid gegeven door (1)). U mag een benadering uitrekenen van deze kans, maar verantwoord in dit geval de door u gekozen benadering.

3. De stochasten X, Y zijn onafhankelijk en standaard normaal verdeeld, i.e., de gemeenschappelijke kansdichtheid wordt gegeven door

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

- a) Toon aan dat $X' = (X + Y)/\sqrt{2}$ en $Y' = (X - Y)/\sqrt{2}$ opnieuw twee onafhankelijke standaard normaal verdeelde stochasten zijn.
- b) Toon aan dat, geconditioneerd op $X + Y = v$, X normaal verdeeld is met verwachting $v/2$ en variantie $1/2$.
- c) Bereken de conditionele verwachtingen $\mathbb{E}(X|X + Y)$, en $\mathbb{E}(X^2|X + Y)$.
- d) We definiëren de stochasten R, Θ als de poolcoördinaten van (X, Y) , i.e., $X = R \cos(\Theta), Y = R \sin(\Theta)$, $R \geq 0, \Theta \in [0, 2\pi]$. Bereken de conditionele kans

$$\mathbb{P}\left(\Theta \leq \frac{\pi}{2} | R \leq 1\right)$$

U mag hierbij gebruiken dat de Jacobiaan (determinant van $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$) voor transformatie naar poolcoördinaten, (i.e., $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$) gelijk is aan r .

4. We beschouwen een Markov keten met 4 toestanden met overgangsmatrix gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Bereken de stationaire verdeling en beargumenteer waarom deze uniek is.
- b) We starten de Markov keten op tijdstip $n = 0$ uit de stationaire verdeling, i.e., $P(X_0 = i) = \mu_i$ met μ_i de stationaire verdeling. Bereken de kans

$$\mathbb{P}(X_5 = 3 | X_6 = 4, X_7 = 3).$$

- c) Indien we de Markovketen starten uit toestand 1, wat is dan de kans dat na tien stappen de toestand 1 nooit meer bezocht wordt?

5. Zijn de volgende uitspraken juist of fout? Beargumenteer uw antwoord.

- a) Voor een irreducibele Markovketen met een eindig aantal toestanden en overgangsmatrix P geldt altijd dat de verdeling in de loop van de tijd naar de unieke stationaire verdeling π convergeert i.e., voor alle beginverdelingen μ geldt $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu P^N = \pi$.

- b) In een telefooncentrale komen gemiddeld 10 telefoons per uur binnen. Een uur lang is er geen enkele telefoon binnen gekomen. De kans dat dan in het volgende half uur twee telefoons binnenkomen is gelijk aan $5^2 e^{-5}/2$.
- c) $X_n, n \in \mathbb{N}$ is een rij onafhankelijke en gelijk verdeelde positieve stochasten waarvoor geldt

$$P(X > x) = \begin{cases} x^{-3}, & \text{voor } x > 1 \\ 1 & \text{voor } x \leq 1 \end{cases}$$

Dan kunnen we besluiten dat voor grote n het gemiddelde $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ benaderend normaal verdeeld is.