

Uitwerkingen tentamen 30 juni 2014

1. a) $\mathbb{P}(X = 1 \cap Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1|Z = 1)\mathbb{P}(Z = 1) = (1/4)(1 - (3/4)) = 1/16$

b) dit is de kans van de gebeurtenis $((X = 1) \cup (Y = 0)) \setminus (X = 1 \cap Y = 0)$ en is dus gelijk aan $\mathbb{P}(X = 1 \cup Y = 0) - \mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0)$ wat gelijk is aan

$$\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(Y = 0) - 2\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0)$$

verder geldt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0) &= \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1) \\ &= (1/2) - \mathbb{P}(X = 1|Y = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = (1/2) - (3/8) = 1/8\end{aligned}$$

Bijgevolg

$$\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(Y = 0) - 2\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0) = (1/2) + (1 - 1/2) - 2(1/8) = 3/4$$

c) Gebruik makend van Bayes stelling is dit

$$\frac{\mathbb{P}(X = 1|Z = 1)\mathbb{P}(Z = 1)}{\mathbb{P}(X = 1)} = \frac{(1/4)(1 - (3/4))}{(1/2)} = (1/8)$$

d) Neen, omdat $\mathbb{P}(X = 1|Y = 1) = (3/4) \neq \mathbb{P}(X = 1) = (1/2)$.

2. We gebruiken in heel de opgave dat $\int_0^1 x^n dx = (1/(n+1))$

a)

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x 4x(1-x^2) = (4/3) - (4/5) = (8/15)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 4x(1-x^2) = (4/4) - (4/6) = (1/3)$$

Bijgevolg

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = (1/3) - (16/225) = 59/225$$

b) Voor $x \in [0, 1]$ wordt de verdelingsfunctie gegeven door

$$F_X(x) = \int_0^x 4y(1 - y^2) = 2x^2 - x^4$$

De functie g is de inverse van de verdelingsfunctie, i.e., $g(u) = y$ is de oplossing van

$$2y^2 - y^4 = u, \text{ ofwel } y^4 - 2y^2 + u = 0$$

wat geeft, rekening houdend met het gegeven dat de oplossing y moet behoren tot het interval $[0, 1]$:

$$y = g(u) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - u}}$$

c) De stochasten $Y_i = X_i^2$ zijn opnieuw onafhankelijk en gelijk verdeeld met verwachting

$$\mu = \mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X_i^2) = 1/3$$

en variantie

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(Y_i^2) - \mathbb{E}(Y_i)^2 = \mathbb{E}(X_i^4) - (1/9)$$

Er geldt

$$\mathbb{E}(X_i^4) = \int_0^1 x^4 4x(1 - x^2) dx = (4/6) - (4/8) = (1/6)$$

en dus

$$\sigma^2 = 1/6 - 1/9 = 1/18$$

De voorwaarden van de centrale limietstelling zijn dus voldaan (onafhankelijk, gelijk verdeeld eindige verwachting en variantie), en dus geldt met deze waarden van μ, σ^2 dat

$$\frac{1}{\sqrt{N\sigma^2}} \sum_{i=1}^N (X_i^2 - \mu)$$

convergeert naar een standaard normaal verdeelde stochast.

d) Ten eerste merken we op dat

$$E(Y_N) = \mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)^2$$

waaruit volgt dat

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(Y_N) = \mathbb{E}(X_1)^2$$

Gebruik makend van de Chebychev ongelijkheid moeten we dus enkel aantonen dat de variantie van Y_N naar nul convergeert als $N \rightarrow \infty$. Stel $Z_i = X_i X_{i+1}$ dan geldt

$$Y_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i$$

en dus

$$Var(Y_N) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N cov(Z_i, Z_j)$$

Deze covariantie is vanwege de hint enkel verschillend van nul voor de gevallen $i = j, i = j - 1, i = j + 1$. Stel $|cov(Z_i, Z_i)| = A, |cov(Z_i, Z_{i+1})| = B, |cov(Z_i, Z_{i-1})| = C$. Merk op dat deze getallen niet van i afhangen omdat X_i gelijk verdeeld zijn en onafhankelijk. De preciese waarde van A, B, C spelen verder geen rol. Dan kunnen we dus afschatten

$$\begin{aligned} Var(Y_N) &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N cov(Z_i, Z_j) \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N (A + B + C) = (A + B + C)/N \end{aligned}$$

Waaruit volgt

$$\lim_N Var(Y_N) = 0$$

- e) De kans $\mathbb{P}(X < (1/10)) = 2/100 - (1/10000)$. Bijgevolg is het aantal i met $X_i < 1/10$ benaderend Poisson verdeeld met parameter $100(2/100 - (1/10000)) \approx 2$ (benadering van binomiale verdeling met $n = 100$ en succeskans $(2/100 - (1/10000))$). de gevraagde kans is dan benaderend gelijk aan

$$\frac{2^5 e^{-2}}{5!}$$

- a) De transformatie

$$x' = (x + y)/\sqrt{2}, y' = (x - y)/\sqrt{2}$$

is een rotatie en heeft dus absolute waarde van de Jacobiaan gelijk aan 1. Verder behoudt een rotatie de norm dus geldt

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

(dit kan uiteraard ook door een expliciete berekening geverifieerd worden) Bijgevolg wordt de nieuwe kansdichtheid gegeven door

$$f_{X'Y'}(x'y') = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x(x',y')^2 + y(x',y')^2)} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)}$$

- b) De verdeling van $X + Y$ is normaal met verwachting nul en variantie 2. De conditionele kansdichtheid van X , gegeven $X + Y = v$ wordt dus gegeven door

$$\begin{aligned} f_{X|X+Y=v}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x, v-x)}{\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{v^2/4}} \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(v-x)^2}}{\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{v^2/4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-v/2)^2} \end{aligned}$$

en dit is inderdaad de kansdichtheid van een normale verdeling met verwachting $v/2$ en variantie $1/2$.

- c) We weten uit onderdeel b) dat gegeven $X+Y$, X normaal verdeeld is met verwachting $(X+Y)/2$ en variantie $(1/2)$. Bijgevolg, gebruik makend van $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

$$\mathbb{E}(X|X+Y) = (X+Y)/2$$

$$\mathbb{E}(X^2|X+Y) = (1/2) + (X+Y)^2/4$$

- d) Gebruik makend van het gegeven is de kansdichtheid in poolcoördinaten gegeven door

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{1}{2}r^2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r < \infty$$

Bijgevolg zijn R en Θ onafhankelijk, en Θ is uniform verdeeld op het interval $[0, 2\pi]$. De kans gevraagde kans is dus simpelweg

$$\mathbb{P}(\Theta \leq \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2\pi}(\pi/2) = 1/4$$

3. a) stationaire verdeling is $(0, 1/3, 1/3, 1/3)$ Uniek omdat de rang van de overgangsmatrix gelijk is aan 3.
- b) Deze kans is

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mathbb{P}(X_5 = 3, X_6 = 4, X_7 = 3)}{\mathbb{P}(X_6 = 4, X_7 = 3)} \\
 = & \frac{\mathbb{P}(X_5 = 3)\mathbb{P}(X_6 = 4|X_5 = 3)\mathbb{P}(X_7 = 3|X_6 = 4)}{\mathbb{P}(X_6 = 4)\mathbb{P}(X_7 = 3|X_6 = 4)} \\
 = & \frac{(1/3)(1/2)(1/2)}{(1/3)(1/2)} = 1/2
 \end{aligned}$$

- c) Eens de toestand 1 verlaten is, komt men er nooit terug. Het aantal stappen voor 1 verlaten wordt is dus geometrisch verdeeld met succeskans $1/8$. Noemen we dus X dit aantal stappen dan geldt

$$\mathbb{P}(X \leq 10) = 1 - \mathbb{P}(X > 10) = 1 - (1 - p)^{10} = 1 - (7/8)^{10}$$

4. a) Fout, de Markov keten met twee toestanden met overgangskansen $P_{12} = P_{21} = 1$ is irreducibel (maar niet aperiodisch!) en convergeert vanuit de begintoestand 1 niet naar de unieke stationaire verdeling $(1/2, 1/2)$.
- b) Juist, we kunnen het aantal telefoons in een half uur benaderen door een Poisson verdeling met parameter $5 = 10(1/2)$ en de voorgeschiedenis speelt geen rol vanwege geheugenloosheid.
- c) Juist, dit volgt uit de centrale limietstelling. De stochast X heeft kansdichtheid $3/x^4$ voor $x > 1$ en dus zijn $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X^2)$ beide eindig, zodat de voorwaarden voor de centrale limietstelling voldaan zijn.