

Tentamen Analyse 2
7 juli 2017, 9.00-12.00

- Een rekenmachine of formuleblad is niet toegestaan.
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- De waardering voor iedere vraag staat in de kantlijn. Het cijfer wordt bepaald met de formule
$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$

1. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y^2}.$$

- 3 a) Laat met behulp van de definitie van partiële afgeleide zien dat $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.
- 3 b) Maak de definitie af:
Een functie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is differentieerbaar in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ als ...
- 5 c) Toon aan dat f differentieerbaar is in $(0, 0)$.
- 4 d) Is $\frac{\partial f}{\partial x}$ continu in $(0, 0)$?

15 2. De functie $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$\Phi(r, \varphi) = (Ar \cos(\varphi), Br \sin(\varphi)), \quad D = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\},$$

waarbij $A, B > 0$ constant zijn.

- 5 a) Toon aan met de inverse-functiestelling: ieder punt in D heeft een omgeving U zo dat $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ injectief is.
- 2 b) Is Φ injectief?
- 8 c) De functies f en F zijn continu differentieerbare functies die voldoen aan $f \circ \Phi = F$, d.w.z. $f(Ar \cos(\varphi), Br \sin(\varphi)) = F(r, \varphi)$.
Druk $\frac{\partial f}{\partial x}$ uit in termen van r, φ en partiële afgeleiden van F .

15 3. Het gebied $G \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ en } x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

- 10 a) Beschrijf G in bolcoördinaten.
- 5 b) Bereken $\iiint_G \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z)$.

15 Zie ommezijde voor vervolg

4. $S \subset \mathbb{R}^3$ is het oppervlak verkregen door de grafiek van $2 \sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$, om de x -as te wentelen.

5 a) Geef een parametrisering van S .

5 b) Geef een vergelijking van het raakvlak aan S in het punt $(\frac{\pi}{4}, 1, 1)$.

5 c) Bereken $\iint_S \frac{1}{\sqrt{5 - y^2 - z^2}} d\Omega$.

5. De kromme $C \subset \mathbb{R}^3$ is de driehoek met hoekpunten $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ en $(0, 0, 2)$. C is van bovenaf gezien georiënteerd tegen de wijzers van de klok in. $\mathbf{F}$ is het vectorveld gegeven door $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 + x^{42}, y^2, x + z^{42})$.

4 a) Formuleer de stelling van Stokes.

3 b) Bereken $\text{rot}(\mathbf{F})$.

8 c) Bereken $\int_C \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds$.

6. $C \subset \mathbb{R}^3$ is de snijkromme (een cirkel) van het vlak $x + y + z = 0$ en het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 24$. De functie $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y, z) = xy + 2z$.

3 a) Toon aan dat f een minimum en een maximum heeft.

12 b) Bepaal het minimum en maximum van f met behulp van multiplicatoren van Lagrange.

EINDE