

Deeltentamen Analyse 2, TW1070

18 april 2017, 9.00-11.00

-
- Een rekenmachine of formuleblad is niet toegestaan.
 - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
 - De waardering voor iedere vraag staat in de kantlijn. Het cijfer wordt bepaald met de formule
$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 5}{5}$$
-

4+4

1. Bereken de limiet, of laat zien dat de limiet niet bestaat.

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{\ln(1 + x^2 + y^2)} \qquad \text{b) } \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + xz + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

7

2. Bereken

$$\iint_G \sqrt{4 - y^2} \, d(x, y),$$

waarbij $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, |y| \leq \sqrt{4 - x^2}\}$.3. $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ is een vector met $\|\mathbf{v}\| = 1$. De functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is differentieerbaar naar $\mathbf{v}$ in het punt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

3

a) Definieer $F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$. Laat zien dat $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a})$.

5

b) De functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is differentieerbaar. Bewijs:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = g'(f(\mathbf{a})) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}).$$

2

4. a) Maak de definitie af:

De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is *differentieerbaar* in het punt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ als ...

5

b) Bewijs met behulp van de definitie dat $f(x, y) = x^2 + xy$ differentieerbaar is in $(1, 2)$.

5

c) V is het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(1, 2, 3)$. $C \subset \mathbb{R}^3$ is de kromme met parametervoorstelling

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 + t \\ 2 + t^2 \\ 3 + 4t + t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Toon aan dat C in het vlak V ligt.5. $D \subset \mathbb{R}^2$ is het gebied $D = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ en } y \geq 0\}$. De functie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y) = x^3 y^2 (12 - x - y).$$

6

a) Bepaal alle stationaire punten van f .

4

b) Bepaal van ieder stationair punt of het een lokaal minimum, lokaal maximum of zadelpunt is.

EINDE