

Tentamen Analyse 2
12 augustus 2016, 9.00-12.00

-
- Een rekenmachine of formuleblad is niet toegestaan.
 - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
 - De waardering voor iedere vraag staat in de kantlijn. Het cijfer wordt bepaald met de formule
$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$
-

- (3+3) 1. a) Maak de volgende definities af.
- Een punt $a \in \mathbb{R}^n$ is een *randpunt* van de verzameling $D \subset \mathbb{R}^n$ als ...
 - $E \subset \mathbb{R}^n$ is een *open verzameling* als ...
- (6) b) Bewijs met de definities: als a een randpunt is van een open verzameling D , dan $a \notin D$.
- (6) 2. Bereken de limiet, of toon aan dat deze niet bestaat:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + (x - y^2)^2}.$$

3. De functie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y) = xy e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$.
- (5) a) Laat zien dat
- $$f_x(x, y) = \left(y - \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$
- (3) b) Laat zien dat $f_x(0, 0)$ bestaat met behulp van de definitie van de partiële afgeleide.
- (8) c) Toon aan dat f_x continu is in $(0, 0)$.
- (4) d) Is f differentieerbaar in $(0, 0)$?

4. De kromme $C \subset \mathbb{R}^2$ wordt in *poolcoördinaten* gegeven door de vergelijking $\varphi = g(r)$, waarbij $a \leq r \leq b$ en $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is.
- (4) a) Laat zien dat C een gladde kromme is.
- (8) b) Laat zien dat de booglengte van C wordt gegeven door

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + r^2 g'(r)^2} dr.$$

Zie ommezijde voor vervolg

5. We definiëren een coördinatentransformatie op $\mathbb{R}^2$ door

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

- (6) a) Definieer $F(x, y) = f(u, v)$, waarbij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie is met $\frac{\partial f}{\partial u}(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) = 1$ en $\frac{\partial f}{\partial v}(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) = 3$.

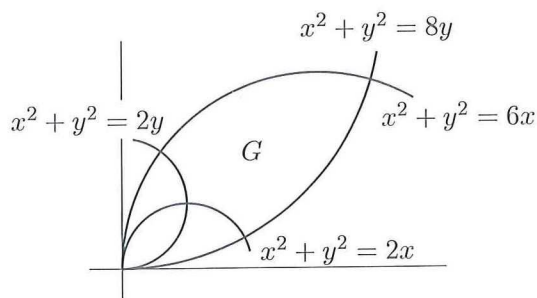
Bereken $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 2)$.

- (6) b) Laat zien dat

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2}.$$

- (6) c) $G \subset \mathbb{R}^2$ is het gebied aangegeven in de figuur. Bereken

$$\iint_G \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} d(x, y).$$



6. Het vectorveld $\mathbf{F}$ is gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y, z), \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Let op: $\mathbf{F}$ is niet gedefinieerd in $(0, 0, 0)$!

- (5) a) Formuleer de divergentiestelling van Gauss.
 (4) b) Laat zien dat $\text{div}(\mathbf{F}) = 0$.
 (8) c) Het oppervlak S_1 is de sfeer $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, georiënteerd met de naar buiten gerichte eenheidsnormaal $\mathbf{n}_1$. Parametriseer S_1 en toon aan, *zonder de divergentiestelling*, dat

$$\iint_{S_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_1 \rangle d\Omega = 4\pi.$$

- (5) d) Het oppervlak S_2 is de sfeer $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 1729$, georiënteerd met de naar buiten gerichte eenheidsnormaal $\mathbf{n}_2$. Bereken

$$\iint_{S_2} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}_2 \rangle d\Omega.$$

EINDE