

Tentamen Analyse 2

1 juli 2016, 9.00-12.00

- Een rekenmachine of formuleblad is niet toegestaan.
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- De waardering voor iedere vraag staat in de kantlijn. Het cijfer wordt bepaald met de formule
Cijfer = $\frac{\text{Totaal} + 10}{10}$

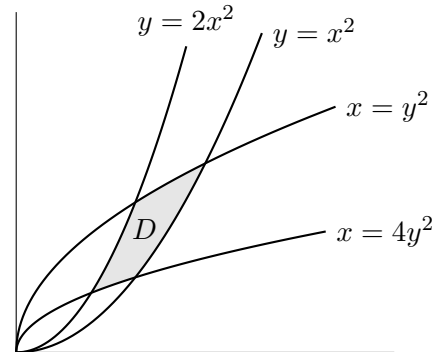
1. De functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

- (7) a) Toon aan dat f continu is in $(0, 0, 0)$.
 (4) b) Maak de definitie af. De functie f is differentieerbaar in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ als ...
 (7) c) Toon aan dat f niet differentieerbaar is in $(0, 0, 0)$.

- (12) 2. Bereken de oppervlakte van het gebied $D \subset \mathbb{R}^2$, zie figuur.

Hint: Gebruik $u = \frac{y}{x^2}$ en $v = \frac{x}{y^2}$.



3. De functie $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$g(x, y, z) = f(r(\mathbf{x})), \quad r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

waarbij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een twee maal continu differentieerbare functie is.

- (5) a) Laat zien dat

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x f'(r)}{r}.$$

- (7) b) Druk

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

uit in termen van f , f' , f'' en r .

Zie ommezijde voor vervolg

4. Het oppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9\}.$$

- (5) a) Geef een vergelijking van het raakvlak aan S in het punt $(2, 1, 1)$.

De functie $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $g(x, y, z) = x^2 - y^2$.

- (3) b) Beargumenteer waarom g een minimum en maximum heeft.

- (10) c) Bereken het minimum en maximum van g met behulp van multiplicatoren van Lagrange.

- (5) 5. a) Formuleer de stelling van Green.

- (10) b) De kromme $C \subset \mathbb{R}^2$ is de ellips $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$, georiënteerd met de wijzers van de klok mee. Bereken

$$\int_C 9y^3 dx - 4x^3 dy.$$

6. De functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is een continu differentieerbare, positieve functie. $S \subset \mathbb{R}^3$ is het oppervlak verkregen door de grafiek van $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, om de x -as te wentelen.

- (5) a) Geef een parametrisering van S .

- (5) b) Bepaal een normaalvectorveld op S .

- (5) c) S wordt georiënteerd met het eenheidsnormaalvectorveld $\mathbf{n}$ dat van de x -as af wijst. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2, \sin(x), \cos(x))$ is een vectorveld op S . Laat zien dat

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\Omega = \frac{\pi}{2} (f(a)^4 - f(b)^4).$$

EINDE