

Uitwerkingen Tentamen Analyse 2, TW1070

1 juli 2016, 9.00-12.00

1. a) We gebruiken $|x|, |y|, |z| \leq \|\mathbf{x}\|$ met $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta = \varepsilon$. Als $\|\mathbf{x}\| < \delta$, dan

$$|f(x, y, z)| = \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|^2} = \|\mathbf{x}\| < \delta = \varepsilon,$$

dus f is continu in $(0, 0, 0)$.

- b) De functie f is differentieerbaar in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ als er een lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat, zo dat

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

- c) Als f differentieerbaar is in $(0, 0, 0)$, dan wordt de bijbehorende lineaire afbeelding L gegeven door $L(\mathbf{h}) = \langle \nabla f(0, 0, 0), \mathbf{h} \rangle$. Er geldt

$$f_x(0, 0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2} = 0,$$

en op dezelfde manier $f_y(0, 0, 0) = f_z(0, 0, 0) = 0$, dus $L(\mathbf{h}) = 0$. We moeten laten zien dat de limiet

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{h}) - f(\mathbf{0}) - L(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|h_1 h_2 h_3|}{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

niet gelijk is aan nul. (Je kunt hier laten zien dat de limiet niet bestaat.) Neem de limiet over de lijn $h_1 = h_2 = h_3$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h^3|}{(3h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

2. De Jacobiaan van de transformatie $u = \frac{y}{x^2}$, $v = \frac{x}{y^2}$ is

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{-2x}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{4xy}{x^3 y^3} - \frac{1}{x^2 y^2} = \frac{3}{x^2 y^2}.$$

Hieruit volgt dat

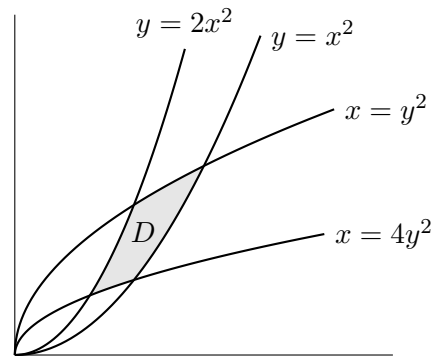
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{x^2 y^2}{3} = \frac{1}{3} \frac{1}{u^2 v^2}$$

Uit de figuur lezen we af dat

$$D = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq 4y^2, x^2 \leq y \leq 2x^2\}.$$

In (u, v) -coördinaten is dit

$$E = \{(u, v) : 1 \leq v \leq 4, 1 \leq u \leq 2\}.$$



De oppervlakte wordt nu

$$\begin{aligned}\text{Opp}(D) &= \iint_D d(x, y) = \iint_E \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| d(u, v) \\ &= \frac{1}{3} \int_1^4 \frac{1}{v^2} dv \int_1^2 \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{v} \right]_{v=1}^{v=4} \cdot \left[-\frac{1}{u} \right]_{u=1}^{u=2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

3. a) Er geldt

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}.$$

Nu vinden we met de kettingregel

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x f'(r)}{r}.$$

b) Nogmaals de kettingregel toepassen, en de productregel, geeft

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x f'(r)}{r} \right) = 1 \cdot \frac{f'(r)}{r} + x \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{f'(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= \frac{f'(r)}{r} + x \cdot \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \\ &= \frac{f'(r)}{r} + x^2 \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^3}.\end{aligned}$$

Vanwege symmetrie in x, y, z vinden we dan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} &= 3 \frac{f'(r)}{r} + (x^2 + y^2 + z^2) \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^3} \\ &= 3 \frac{f'(r)}{r} + \frac{r f''(r) - f'(r)}{r} = 2 \frac{f'(r)}{r} + f''(r).\end{aligned}$$

4. a) S is een niveau-oppervlak van de functie $G(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Een normaalvector op het raakvlak in $(2, 1, 1)$ is

$$\nabla G(2, 1, 1) = (2x, 4y, 6z) \big|_{(x,y,z)=(2,1,1)} = (4, 4, 6).$$

Een vergelijking van het raakvlak aan S in $(2, 1, 1)$ is dan

$$4(x - 2) + 4(y - 1) + 6(z - 1) = 0.$$

b) g is een polynoom, dus een continue functie. S is gesloten en begrensd, ofwel compact. Een continue functie op een compacte verzameling neemt een minimum en maximum aan.

c) We lossen op:

$$\nabla g(x, y, z) = \lambda \nabla G(x, y, z) \quad \text{en} \quad G(x, y, z) = 9,$$

ofwel

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9 \tag{1}$$

$$2x = 2\lambda x \tag{2}$$

$$-2y = 4\lambda y \tag{3}$$

$$0 = 6\lambda z \tag{4}$$

Vergelijking (4) geeft $\lambda = 0$ of $z = 0$.

$\lambda = 0$ invullen in (2) en (3) geeft $x = y = 0$ en dan geeft (1) $z = \pm\sqrt{3}$. De waarde van g in deze punten is $g(0, 0, \pm\sqrt{3}) = 0$.

Neem nu aan dat $z = 0$. Oplossen van (2) levert $\lambda = 1$ of $x = 0$.

$\lambda = 1$ invullen in (3) geeft $y = 0$, en dan geeft (1) dat $x = \pm 3$. De waarde van g in deze punten is $g(\pm 3, 0, 0) = 9$.

Tenslotte, neem aan dat $z = 0$ en $x = 0$. Dan geeft (1) dat $y = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. De waarde van g in deze punten is $g(0, \pm\frac{3}{\sqrt{2}}, 0) = -\frac{9}{2}$.

Conclusie: g neemt een maximum aan in $(\pm 3, 0, 0)$ met waarde 9, en g neemt een minimum aan in $(0, \pm\frac{3}{\sqrt{2}}, 0)$ met waarde $-\frac{9}{2}$.

5. a) Zie dictaat.

b) Het vectorveld is duidelijk continu differentieerbaar, en C is een gesloten gladde kromme, dus we kunnen de stelling van Green toepassen. Er geldt

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -12x^2 - 27y^2.$$

Pas nu de stelling van Green toe, waarbij $G = \{(x, y) : (\frac{x}{3})^2 + (\frac{y}{2})^2 \leq 1\}$, het gebied ingesloten door C :

$$I = \int_C 9y^3 dx - 4x^3 dy = - \iint_G (-12x^2 - 27y^2) d(x, y) = 3 \iint_G (4x^2 + 9y^2) d(x, y).$$

Het minteken voor de integraal komt van de oriëntatie van C . We gebruiken de transformatie

$$x = 3r \cos(\varphi), \quad y = 2r \sin(\varphi),$$

met Jacobiaan

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} 3 \cos(\varphi) & -3r \sin(\varphi) \\ 2 \sin(\varphi) & 2r \cos(\varphi) \end{vmatrix} = 6r.$$

Het gebied G wordt nu

$$H = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Dan

$$I = 3 \iint_H 36r^2 \cdot 6r d(r, \varphi) = 3 \cdot 36 \cdot 6 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\varphi = 3 \cdot 36 \cdot 6 \cdot 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 = 324\pi.$$

6. De functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is een continu differentieerbare, positieve functie. $S \subset \mathbb{R}^3$ is het oppervlak verkregen door de grafiek van $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, om de x -as te wentelen.

a) $\mathbf{X}(x, \varphi) = (x, f(x) \cos(\varphi), f(x) \sin(\varphi))$ met $(x, \varphi) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$.

b) Eerst de partiële afgeleiden van $\mathbf{X}$ uitrekenen:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_x(x, \varphi) &= (1, f'(x) \cos(\varphi), f'(x) \sin(\varphi)), \\ \mathbf{X}_\varphi(x, \varphi) &= (0, -f(x) \sin(\varphi), f(x) \cos(\varphi)). \end{aligned}$$

Een normaalvectorveld op S is

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_x \times \mathbf{X}_\varphi(x, \varphi) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & f'(x) \cos(\varphi) & f'(x) \sin(\varphi) \\ 0 & -f(x) \sin(\varphi) & f(x) \cos(\varphi) \end{vmatrix} \\ &= (f'(x)f(x), -f(x) \cos(\varphi), -f(x) \sin(\varphi)). \end{aligned}$$

- c) Het normaalvectorveld uit onderdeel b wijst naar de x -as toe, dus deze past niet bij de gegeven oriëntatie. Er geldt

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{F}(\mathbf{X}(x, \varphi)), \mathbf{X}_x \times \mathbf{X}_\varphi(x, \varphi) \right\rangle \\ &= \left\langle (f(x)^2, \sin(x), \cos(x)), (f'(x)f(x), -f(x)\cos(\varphi), -f(x)\sin(\varphi)) \right\rangle \\ &= f(x)^3 f'(x) - f(x)\sin(x)\cos(\varphi) - f(x)\cos(x)\sin(\varphi). \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\Omega &= - \int_a^b \int_0^{2\pi} f(x)^3 f'(x) - f(x)\sin(x)\cos(\varphi) - f(x)\cos(x)\sin(\varphi) d\varphi dx \\ &= -2\pi \left[\frac{1}{4} f(x)^4 \right]_a^b = \frac{1}{2} \pi (f(a)^4 - f(b)^4), \end{aligned}$$

waarbij we gebruiken dat $\int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi = 0$.