IN1305II Fundamentele Informatica, Deel 2

Deeltentamen (Uitwerkingen)

Opgave T.2.1 *(Rijtjes en Talen)* Zij $\Sigma = \{a, b\}$ een alfabet.

(i) Zij $L_0 = \{a, b\}$ en $L_1 = \{\varepsilon, ab, ba\}$. Som de elementen van de taal $\{w \in (L_0L_1)^* \mid |w| \leqslant 3\}$ op in een verzameling.

(ii) Zij $L \subseteq \Sigma^*$. Bewijs dat $L \cup L^R \subseteq (L \cup L^R)^R$. Hierbij mag worden aangenomen dat $(w^R)^R = w$, voor alle $w \in \Sigma^*$.

Uitwerking:

(i) Merk allereerst op dat $L_0L_1 = \{a, b, aab, aba, bab, bba, \}$. Dan in het bijzonder $\{a, b\}^* \subseteq (L_0L_1)^*$. Dus $\{w \in (L_0L_1)^* \mid |w| \leqslant 3\} = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$.

(ii) *Bewijs:* Beschouw een willekeurig rijtje $w \in L \cup L^R$; we bewijzen dat ook $w \in (L \cup L^R)^R$. Er bestaan twee mogelijkheden (a) $w \in L$ en (b) $w \in L^R$. In het eerste geval (a) geldt dat $w^R \in L^R$. Derhalve eveneens $w^R \in L \cup L^R$. Dan, $(w^R)^R \in (L \cup L^R)^R$. Aangezien we mochten aannemen dat $(w^R)^R = w$, mogen we concluderen dat $w \in (L \cup L^R)^R$. Als daarentegen (b) $w \in L^R$, dan bestaat er een $v \in L$ zodanig dat $w = v^R$. Dan, $v \in L \cup L^R$ en $v^R \in (L \cup L^R)^R$. Aangezien $v^R = w$, mogen we ook nu concluderen dat $w \in (L \cup L^R)^R$. $\square$

Opgave T.2.2 *(Deterministische eindige automaten)*

(i) Zij $\Sigma = \{a, b\}$. Laat L de taal zijn die bestaat uit precies die rijtjes $w \in \Sigma^*$ met een even aantal voorkomens van het symbool a, waarbij iedere a voorafgegaan wordt door tenminste één b. Bijvoorbeeld, $bbaba \in L$, terwijl $aaba \notin L$. Construeer een deterministische eindige automaat (dfa) $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ die L herkent, dat wil zeggen $L = L(M)$. Geef zowel het transitiediagram als de lineaire representatie van de automaat als een geordend vijftal en laat zien dat M inderdaad $bbaba$ accepteert, maar niet $aaba$.

(ii) Zij $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ een deterministische eindige automaat (dfa). Laat verder q, q' toestanden zijn in Q zodanig dat $\delta(q, a) = \delta(q', a)$, voor alle $a \in \Sigma$. Bewijs met inductie naar de lengte van w dat:

$$\delta^*(q, aw) = \delta^*(q', aw),$$

voor ieder woord $w \in \Sigma^*$ en ieder symbol $a \in \Sigma$. Specificeer hierbij de basis, de inductiestap en de inductiehypothese.

Uitwerking:

(i) Het idee achter de volgende uitwerking is dat je twee dingen moet bijhouden in de dfa. Allereerst moet het gewaarborgd zijn dat een rijtje alleen geaccepteerd wordt als er een even aantal a's in voorkomen, anderzijds moet iedere string waarin een a *niet* vooraf wordt gegaan door een b te worden verworpen. In iedere toestand houden we bij of er een even danwel oneven aantal a's is gelezen (q_{ex} danwel q_{ox}) en of het laatst gelezen symbool een b was of niet een b (q_{xb} danwel q_{xa}). Bovendien voegen we een trapstate toe die bereikt wordt wanneer een a wordt gelezen zonder dat die vooraf is gegaan door een b. Merk op dat als er geen a's voorkomen in een rijtje, het aantal a's even is (want 0) en bovendien iedere a, want die zijn er niet, wordt voorafgegaan door een b. Dit resulteert in de deterministische eindige automaat (dfa) $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ met

(a) $Q = \{q_{ea}, q_{eb}, q_{oa}, q_{ob}, q_t\}$

(b) $\Sigma = \{a, b\}$

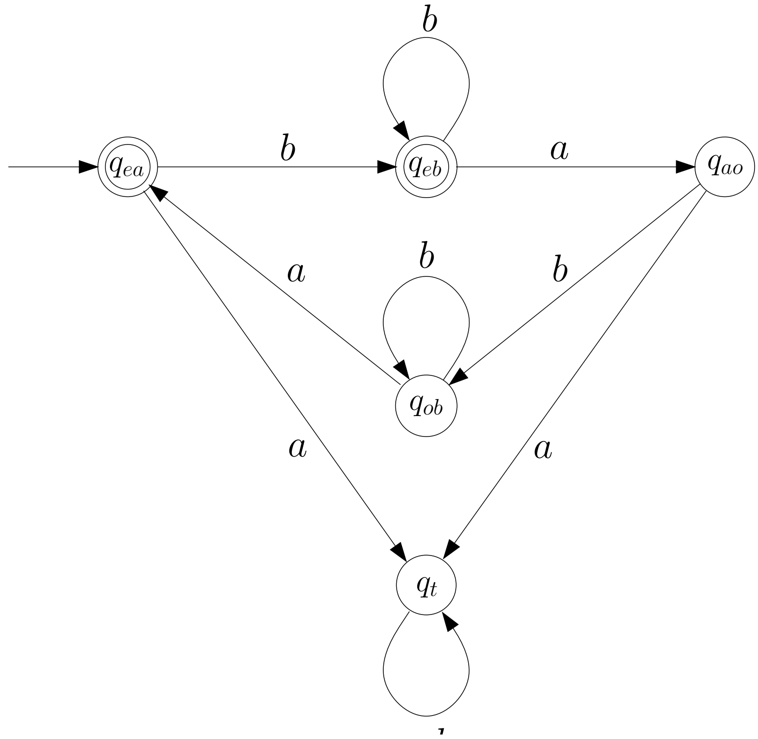
(c) δ gegeven door de volgende tabel:

	a	b
q_{ea}	q_t	q_{eb}
q_{eb}	q_{oa}	q_{eb}
q_{oa}	q_t	q_{ob}
q_{ob}	q_{ea}	q_{ob}
q_t	q_t	q_t

(d) $q_0 = q_{ea}$

(e) $F = \{q_{ea}, q_{eb}\}$

Grafisch kan deze automaat als volgt worden weergegeven:



Beschouw de volgende gelijkheden.

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_{ea}, bbaba) &= \delta(\delta^*(q_{ea}, bbab), a) \\
&= \delta(\delta(\delta^*(q_{ea}, bba), b), a) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta^*(q_{ea}, bb), a), b), a) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(\delta^*(q_{ea}, b), b), a), b), a) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(q_{ea}, b), b), a), b), a) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(q_{eb}, b), a), b), a) \\
&= \delta(\delta(\delta(q_{eb}, a), b), a) \\
&= \delta(\delta(q_{oa}, b), a) \\
&= \delta(q_{ob}, a) \\
&= q_{ea}
\end{aligned}$$

Aangezien $q_{ea} \in F$, geldt inderdaad dat $bbaba \in L(M)$.

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_{ea}, aaba) &= \delta(\delta^*(q_{ea}, aab), a) \\
&= \delta(\delta(\delta^*(q_{ea}, aa), b), a) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta^*(q_{ea}, a), a), b), a) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(q_{ea}, a), a), b), a) \\
&= \delta(\delta(\delta(q_t, a), b), a) \\
&= \delta(\delta(q_t, b), a) \\
&= \delta(q_t, a) \\
&= q_t
\end{aligned}$$

Aangezien $q_t \in F$, geldt inderdaad dat $aaba \notin L(M)$.

(ii) *Bewijs:* Beschouw een willekeurig rijtje $w \in \Sigma^*$.. We bewijzen met inductie naar de lengte $|w|$ van w dat $\delta^*(q, aw) = \delta^*(q', aw)$, voor ieder symbool $a \in \Sigma$.

Basis: In dit geval $|w| = 0$, dat wil zeggen $w = \varepsilon$. We moeten bewijzen dat $\delta^*(q, a\varepsilon) = \delta^*(q', a\varepsilon)$. Beschouw een willekeurig symbool $a \in \Sigma$, willekeurige toestanden $q, q' \in Q$, alsmede de volgende gelijkheden:

$$\delta^*(q, a\varepsilon) \quad = \quad \delta(q, a\varepsilon) \quad =_{\text{def.}\delta} \quad \delta(q', a\varepsilon) \quad = \quad \delta^*(q', a\varepsilon)$$

Inductiestap: Stel $|w| = n + 1$. Dat wil zeggen $w = vb$, voor een $v \in \Sigma^*$ met $|v| = n$ en een symbool $b \in \Sigma$. De inductiehypothese luidt dan dat voor alle toestanden $q, q' \in Q$ en alle symbolen $a \in \Sigma$:

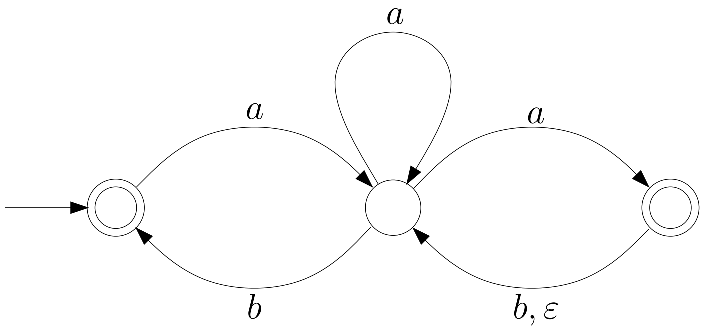
(i.h.) $$\delta^*(q, av) = \delta^*(q', av).$$

Beschouw een willekeurig symbool $a \in \Sigma$, willekeurige toestanden $q, q' \in Q$, alsmede de volgende gelijkheden:

$$\begin{aligned} \delta^*(q, avb) &= \delta(\delta^*(q, av), b) \\ &=_{\text{i.h.}} \delta(\delta^*(q', av), b) \\ &= \delta(q', avb). \end{aligned}$$

Hiermee is de stelling bewezen. □

Opgave T.2.3 *(Niet-deterministische eindige automaten en reguliere talen)*
Beschouw de onderstaande niet-deterministische eindige automaat (nfa) N.



(i) Formuleer een reguliere expressie R met $L(R) = \overline{L(N)}$. Gebruik hierbij onder meer de constructiemethodes als uiteen gezet in Sipser om uit een nfa een dfa te verkrijgen en uit een automaat een reguliere expressie en geef duidelijk aan welke stappen je maakt (dit is belangrijker dan een correct antwoord).

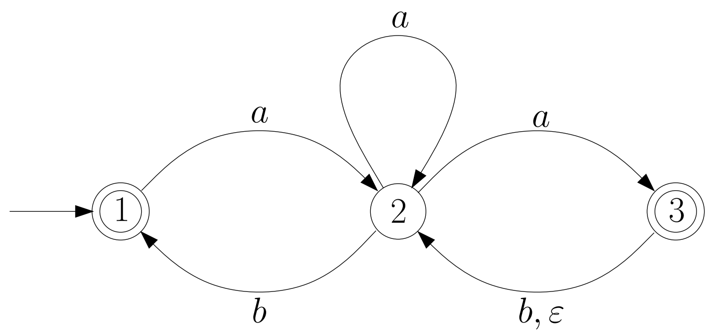
(ii) Zij Σ een alfabet. Bewijs of weerleg de volgende stelling:

Voor alle $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, als $L_1 \subseteq L_2$ en L_2 is regulier, dan is L_1 contextvrij.

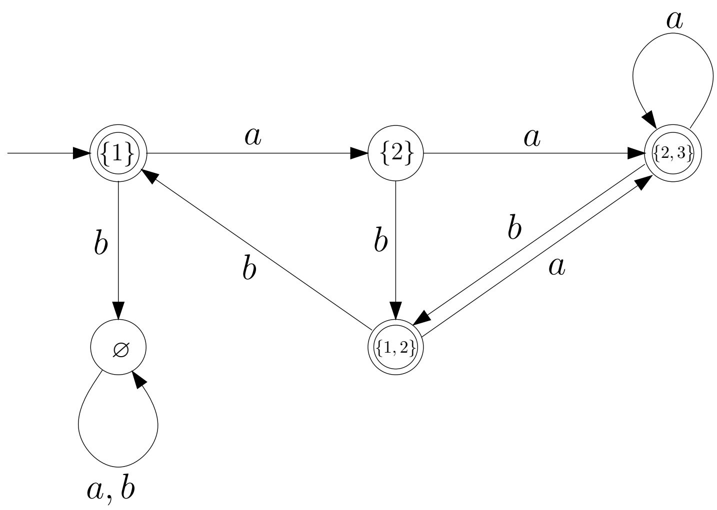
Uitwerking:

(i) Merk allereerst op dat het hier een niet-deterministische automaat betreft. Eerst transformeren we N tot een equivalente dfa dfa. Vervolgens transformeren we M tot een eindige automaat die $\overline{L(M)}$ herkent en uiteindelijk leiden we uit deze automaat een reguliere expressie af.

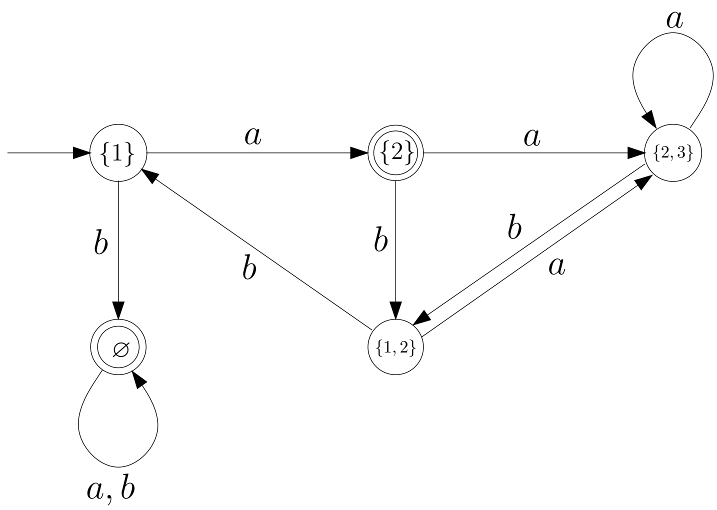
Het is nuttig om eerst de toestanden van nfa te nummeren:



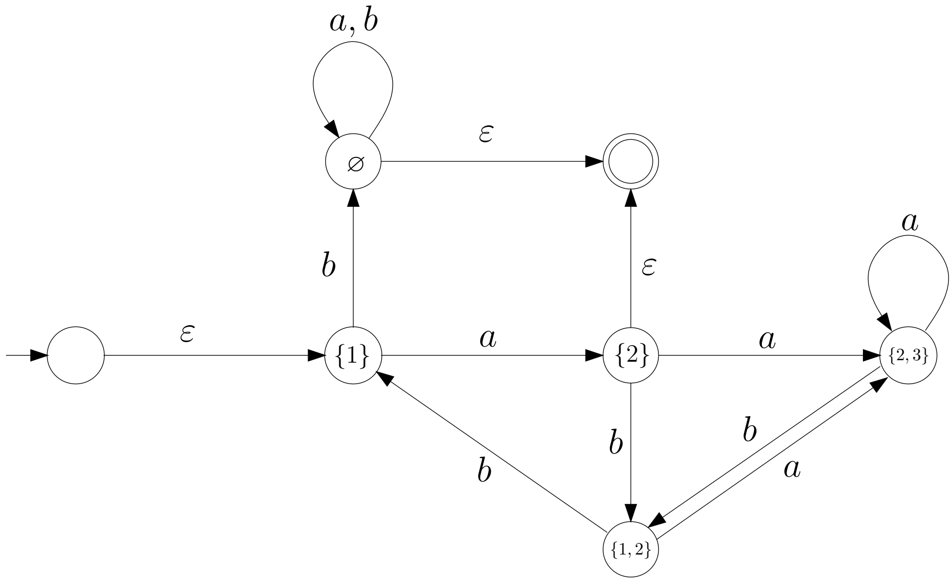
Een equivalente dfa M kan dan als volgt worden verkregen:



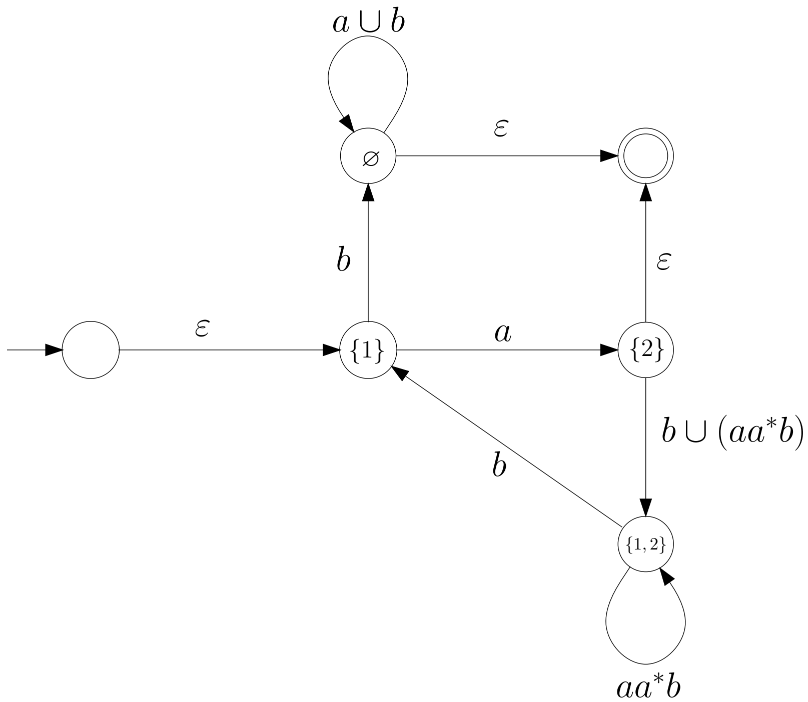
Vervolgens kan hier een dfa M' met $L(M') = L(M)^c$ uit worden verkregen:

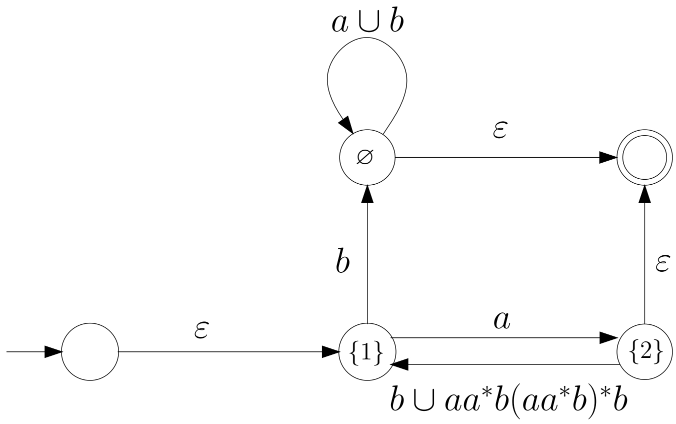


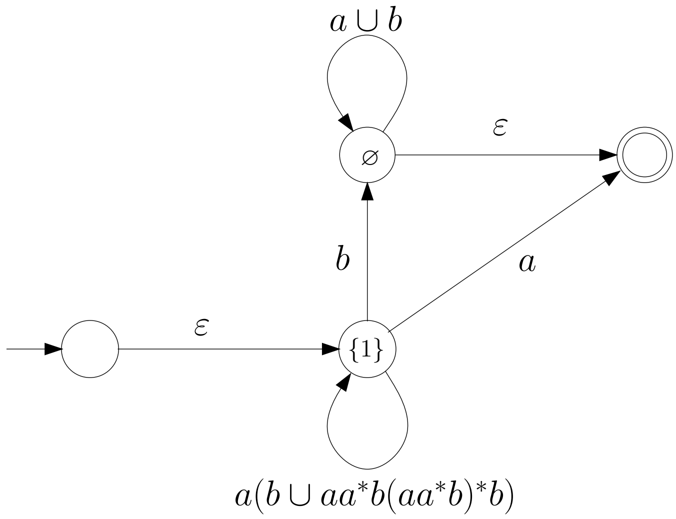
Eerst voegen we een nieuwe begin en een nieuwe eindtoestand toe:

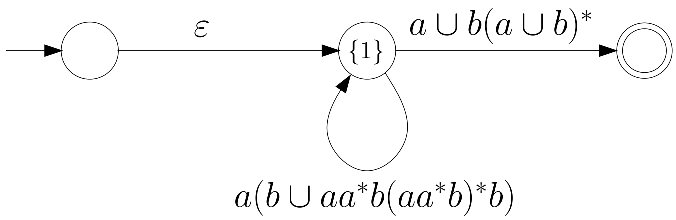


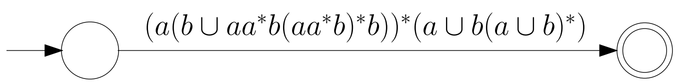
Achtereenvolgens:











Uiteindelijk bereiken we dan voor $R = (a(b \cup aa^*b(aa^*b)^*b))^*(a \cup b(a \cup b)^*)$ dat $L(R) = \overline{L(N)}$.

(ii) De stelling geldt niet in het algemeen. Laat namelijk $\Sigma = \{a, b\}$, $L_1 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ en $L_2 = \{a, b\}^*$. Dan geldt $L_1 \subseteq L_2$ en bovendien is $\{a, b\}^*$ regulier. Echter, L_2 is een typisch geval van een taal die *niet* contextvrij is!

Opgave T.2.4 *(Contextvrije grammatica's en contextvrije talen)* Beschouw de volgende contextvrije grammatica $G = (V, \Sigma, S, R)$:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSb \mid aAb \\ A & \rightarrow & cAd \mid B \\ B & \rightarrow & aBb \mid \varepsilon \end{array}$$

(i) Laat zien dat de grammatica G ambigu is.

(ii) Schrijf de grammatica G om tot een equivalente grammatica in Chomsky normaalvorm. Laat ook hier duidelijk zien welke stappen je achtereenvolgens maakt.

Uitwerking:

(i) Een manier om te laten zien dat een grammatica ambigu is is aan te tonen dat er van een woord twee linker afleidingen (*leftmost derivations bestaan*). Dat kan in de contextvrij grammatica G inderdaad voor het woord $aabb$. Beschouw de volgende twee linker afleidingen:

(a) $$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{A}bb \Rightarrow aa\underline{B}bb \Rightarrow aabb,$$

en

(b) $$\underline{S} \Rightarrow a\underline{A}b \Rightarrow a\underline{B}b \Rightarrow aa\underline{B}bb \Rightarrow aabb.$$

(ii) Om tot een Chomsky normaalvorm te komen maken we achtereenvolgens de volgende stappen:

(a) Voeg een nieuwe startvariabele S_0 toe aan V en de regel $S_0 \rightarrow S$ aan R.
(b) Elimineer alle ε-producties behalve mogelijkerwijs $S_0 \rightarrow \varepsilon$.
(c) Elimineer alle eenheidsproducties.
(d) Converteer alle producties tot de juiste vorm.

Achtereenvolgens krijgen we dan:

(a) $$\begin{array}{lcl} S_0 & \rightarrow & S \\ S & \rightarrow & aSb \mid aAb \\ A & \rightarrow & cAd \mid B \\ B & \rightarrow & aBb \mid \varepsilon \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{lcl} S_0 & \rightarrow & S \\ S & \rightarrow & aSb \mid aAb \mid ab \\ A & \rightarrow & cAd \mid B \mid cd \\ B & \rightarrow & aBb \mid ab \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{lcl} S_0 & \rightarrow & Sb \mid aAb \mid ab \\ S & \rightarrow & aSb \mid aAb \mid ab \\ A & \rightarrow & cAd \mid aBb \mid ab \mid cd \\ B & \rightarrow & aBb \mid ab \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
\text{(d)}\quad S_0 & \rightarrow & SU_b \mid U_aS_1 \mid U_aU_b \\
S_1 & \rightarrow & AU_b \\
S & \rightarrow & U_aS_2 \mid U_aS_1 \mid U_aU_b \\
S_2 & \rightarrow & SU_b \\
A & \rightarrow & U_cA_1 \mid U_aA_2 \mid U_aU_b \mid U_cU_d \\
A_1 & \rightarrow & AU_d \\
A_2 & \rightarrow & BU_b \\
B & \rightarrow & U_aA_2 \mid U_aU_b \\
U_a & \rightarrow & a \\
U_b & \rightarrow & b \\
U_c & \rightarrow & c \\
U_d & \rightarrow & d
\end{array}
$$

Opgave T.2.5 *(Stapelautomaten)* Zij $\{a, b\}$ een alfabet. Laat verder $\overline{w}$ het woord w met alle a's vervangen door b's en *vice versa*. Bijvoorbeeld $\overline{aaba} = bbab$. Zij $L = \left\{w\overline{w}^R \in \{a, b\}^* \mid w \in \{a, b\}^*\right\}$.

(i) Bewijs met behulp van de pompstelling dat de taal L niet regulier is.

(ii) Construeer een stapelautomaat (*push-down automaton* of pda) P met $L(P) = L$.

Uitwerking:

(i) *Bewijs:* Uit het ongerijmde. Stel L is wel regulier. Volgens de pompstelling bestaat er voor L een pomplengte p. Beschouw nu het woord $w = a^pb^p$. Merk op dat $w \in L$ aangezien $b^p = \overline{a^p}^R$. Volgens de pomplengte zijn er $x, y, z \in \{a, b\}^*$ zodanig dat:

(a) $|xy| \leqslant p$,

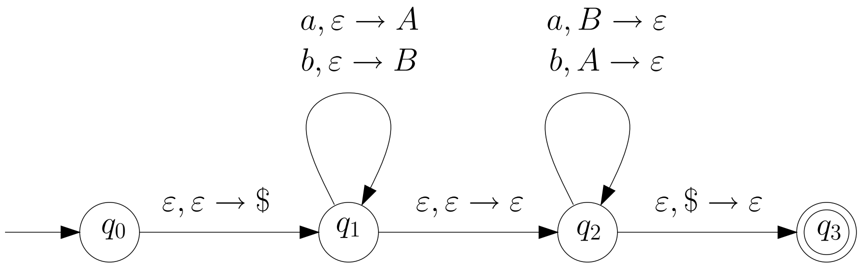
(b) $y \neq \varepsilon$,

(c) $xy^iz \in L$, voor alle $i \geq 0$.

Met (a) en (b) weten we dat $y = a^k$ voor een $1 \leqslant k \leqslant p$. Maar met (c) zou dan ook $xy^2z \in L$. Merk op dat $xy^2z = a^{p+k}b^p$. Echter $a^{p+k}b^p \notin L$. Contradictie. □

(ii) De stapelautomaat die hier als oplossing gegeven kan worden is gelijk aan die voor de taal $\left\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\right\}$, zij het dat in de tweede lus symbolen a met stapelsymbolen B gepaard moeten worden en symbolen

b met stapelsymbolen A:



EINDE DEELTENTAMEN