

Tentamen Analyse 2, TW1070

14 augustus 2015, 9.00-12.00

-
- Een rekenmachine of formuleblad is niet toegestaan.
 - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
 - De waardering voor iedere vraag staat in de kantlijn. Het cijfer wordt bepaald met de formule
$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$
-

1. Bereken de limiet, of toon aan dat de limiet niet bestaat.

(5) a)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(5) b)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + xy)}{x^2 + y^2}$$

(4) 2. a) Maak de definitie af.

De functie $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is differentieerbaar in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ als ...(6) b) Bewijs: als $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is in $\mathbf{a}$, dan is g continu in $\mathbf{a}$.De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y) = \sqrt{|x^2 - y^2|}$.(5) c) Beargumenteer waarom f differentieerbaar is in $(2, 1)$, en bereken $f'(2, 1)$.(5) d) Geef een parametervoorstelling van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(2, 1, \sqrt{3})$.(5) e) Ga na voor welke eenheidsvectoren $\mathbf{v}$ de richtingsafgeleide $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0)$ bestaat.(10) 3. a) Bereken $\iint_D \frac{y}{x^2} d(x, y)$ waarbij

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \text{ en } x \geq y^2 \text{ en } 0 \leq \frac{x}{y} \leq 2 \right\}.$$

Hint: Teken het gebied D .(10) b) $G \subset \mathbb{R}^3$ is het gebied ingesloten door de oppervlakken $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ met $x \geq 0$ en $z \geq 0$. Bereken $\iiint_G z d(x, y, z)$.**ZIE OMMEZIJDE VOOR VERVOLG**

4. De functie $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is gedefinieerd door

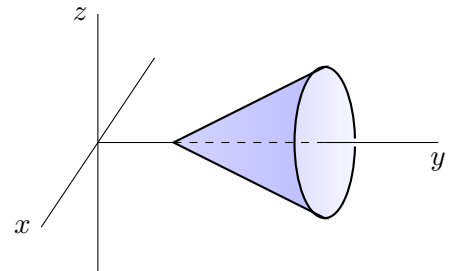
$$\mathbf{f}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

- (4) a) Is $\mathbf{f}$ injectief? Beargumenteer!
- (6) b) Laat met behulp van de Inverse-Functiestelling zien dat er voor ieder punt $(a, b) \neq (0, 0)$ een omgeving bestaat waarop $\mathbf{f}$ injectief is.
- (10) c) $C \subset \mathbb{R}^2$ is een gladde kromme die niet door de oorsprong gaat, met gladde parameter-
 voorstelling $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Het beeld $\mathbf{f}(C)$ is weer een kromme in $\mathbb{R}^2$, met parameter-
 voorstelling $\mathbf{z}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$.
 Bewijs dat de lengte ℓ van de kromme $\mathbf{f}(C)$ wordt gegeven door

$$\ell = 2 \int_a^b \|\mathbf{x}(t)\| \|\mathbf{x}'(t)\| dt.$$

5. Het oppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ is het oppervlak dat ontstaat door de grafiek van $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$, $0 \leq x \leq 2$, om de y -as te wentelen. S is georiënteerd met een eenheids-normaalvectorveld $\mathbf{n}$ dat van de y -as afwijkt. Het vectorveld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z^2, y + 1, 3x^2z + z^3 - x^3).$$



- (4) a) Formuleer de divergentiestelling van Gauss (inclusief alle voorwaarden).
- (11) b) Bereken $\iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\Omega$.

EINDE