

Tentamen Analyse 2, TW1070

3 juli 2015, 9.00-12.00

- Een rekenmachine of formuleblad is niet toegestaan.
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- De waardering voor iedere vraag staat in de kantlijn. Het cijfer wordt bepaald met de formule
$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$

1. Definieer $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ door

$$f(x, y) = (x^2 y^2, 3 + xy + y^3).$$

- (4) a) Maak de definitie af:
 $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is differentieerbaar in $a \in \mathbb{R}^2$ als ...
- (6) b) Bewijs:
Als $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn in $a \in \mathbb{R}^2$, dan is $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ook differentieerbaar in a .
- (6) c) Beargumenteer waarom f differentieerbaar is in $(1, 1)$ en geef $f'(1, 1)$.
- (4) d) Geef de linearisering van f rond $(1, 1)$.

2. Definieer de coördinatentransformatie

$$x = e^u \cos(v), \quad y = e^u \sin(v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

- (10) a) Toon aan met de Inverse-Functiestelling dat deze transformatie lokaal inverteerbaar is, en dat

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \cos(v), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{-u} \sin(v), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-u} \sin(v), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} \cos(v).$$

- (10) b) Zij $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, en definieer $F(x, y) = f(u, v)$. Druk

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2$$

uit in u, v en partiële afgeleiden van f .

- (12) 3. $G \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$G = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2 - z^2} \text{ en } (y - 1)^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

Bereken het volume van G .

Zie ommezijde voor vervolg

4. $S \subset \mathbb{R}^3$ is het deel van het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ met $z \geq 0$ en $x \geq 0$.

(8) a) Geef een parametervoorstelling van S .

(8) b) Bereken $\iint_S (x^2 + y^2)z \, d\Omega$.

5. Het vectorveld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 z e^{xy^2 z}, 2xyz e^{xy^2 z}, xy^2 e^{xy^2 z}).$$

De kromme $C \subset \mathbb{R}^3$ heeft parametervoorstelling

$$\mathbf{x}(t) = (t \cos(t), t^2, t \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 4\pi,$$

en heeft de bijbehorende oriëntatie τ .

(4) a) Is C een gladde kromme?

(8) b) Laat zien met behulp van $\text{rot}(\mathbf{F})$ dat $\mathbf{F}$ conservatief is.

(10) c) Bereken

$$\int_C (y^2 z e^{xy^2 z} - z) \, dx + 2xyz e^{xy^2 z} \, dy + (xy^2 e^{xy^2 z} + x) \, dz.$$

EINDE