

Uitwerkingen Tentamen Analyse 2, TW1070

3 juli 2015, 9.00-12.00

1. a) $\mathbf{g}$ is differentieerbaar in $\mathbf{a}$ als er een lineaire afbeelding $\mathbf{L} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bestaat, zo dat

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}) - \mathbf{L}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

- b) g_1 en g_2 zijn differentieerbaar, dus voor $i = 1, 2$ bestaat er een lineaire afbeelding $L_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zo dat

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|g_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g_i(\mathbf{a}) - L_i(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Definieer de lineaire afbeelding $\mathbf{L} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ door $\mathbf{L} = (L_1, L_2)$. Met de afschatting $\|(x_1, x_2)\| \leq |x_1| + |x_2|$ volgt nu

$$0 \leq \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}) - \mathbf{L}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \frac{|g_1(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g_1(\mathbf{a}) - L_1(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{|g_2(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g_2(\mathbf{a}) - L_2(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Hieruit volgt met de insluitstelling dat de limiet $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ gelijk is aan $\mathbf{0}$, en dus is $\mathbf{g}$ differentieerbaar in $\mathbf{a}$.

- c) Beide componentsfuncties van $\mathbf{f}$ zijn polynomen, en dus differentieerbaar. Uit onderdeel b volgt nu dat $\mathbf{f}$ differentieerbaar is. De afgeleide is

$$\mathbf{f}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2x^2y \\ y & x + 3y^2 \end{pmatrix}$$

In $(1, 1)$:

$$\mathbf{f}'(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- d)

$$\mathbf{f}(1, 1) + \mathbf{f}'(1, 1) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

2. a) Definieer $\mathbf{f}(u, v) = (x, y)$, dan is $\mathbf{f}$ continu differentieerbaar op $\mathbb{R}^2$ en voor alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ geldt

$$J\mathbf{f}(u, v) = \det \mathbf{f}'(u, v) = \begin{vmatrix} e^u \cos(v) & -e^u \sin(v) \\ e^u \sin(v) & e^u \cos(v) \end{vmatrix} = e^{2u} \cos^2(v) + e^{2u} \sin^2(v) = e^{2u} \neq 0.$$

Kies (u, v) vast. Volgens de Inverse-Functiestelling bestaat er een omgeving V van (u, v) zo dat $\mathbf{f} : V \rightarrow \mathbf{f}(V)$ inverteerbaar is'. De inverse $\mathbf{g}(x, y) = \mathbf{f}^{-1}(x, y) = (u, v)$ is continu differentieerbaar en

$$\mathbf{g}'(\mathbf{f}(u, v)) = (\mathbf{f}'(u, v))^{-1},$$

ofwel

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{2u}} \begin{pmatrix} e^u \cos(v) & e^u \sin(v) \\ -e^u \sin(v) & e^u \cos(v) \end{pmatrix}.$$

b) Met de kettingregel:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = e^{-u} \cos(v) \frac{\partial f}{\partial u} - e^{-u} \sin(v) \frac{\partial f}{\partial v}$$

en

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} \sin(v) \frac{\partial f}{\partial u} + e^{-u} \cos(v) \frac{\partial f}{\partial v}$$

Dan

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \\ &= \left(e^{-u} \cos(v) \frac{\partial f}{\partial u} - e^{-u} \sin(v) \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + \left(e^{-u} \sin(v) \frac{\partial f}{\partial u} + e^{-u} \cos(v) \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \\ &= e^{-2u} \left(\cos^2(v) + \sin^2(v) \right) \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + e^{-2u} \left(\cos^2(v) + \sin^2(v) \right) \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \\ &= e^{-2u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + e^{-2u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \end{aligned}$$

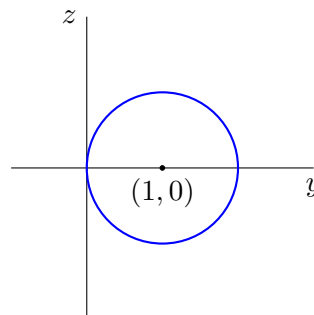
3. G bestaat uit het gebied binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ met positieve x -coördinaat, dat ook binnen de cilinder $(y-1)^2 + z^2 = 1$ ligt. Ga over op cilindercoördinaten (rond de x -as):

$$x = x, \quad y = r \cos(\varphi), \quad z = r \sin(\varphi).$$

De voorwaarde $0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2 - z^2}$ wordt $0 \leq x \leq \sqrt{4 - r^2}$. De voorwaarde $(y-1)^2 + z^2 \leq 1$ schrijven we als $y^2 + z^2 \leq 2y$; in de nieuwe coördinaten wordt dit

$$r^2 \leq 2r \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad r \leq 2 \cos \varphi.$$

Teken de cilinder in het yz -vlak (dit is een cirkel):



Hieruit lezen we af dat $-\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$. Het gebied G wordt nu in cilindercoördinaten gegeven door

$$H = \left\{ (x, r, \varphi) : -\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi, 0 \leq r \leq 2 \cos(\varphi), 0 \leq x \leq \sqrt{4 - r^2} \right\}.$$

En dan

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(G) &= \iiint_G d(x, y, z) = \iiint_H r \, d(x, r, \varphi) \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r \, dx \, dr \, d\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} r \sqrt{4-r^2} \, dr \, d\varphi \\
&= -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(4-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=2 \cos(\varphi)} d\varphi \\
&= -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((4-4 \cos^2(\varphi))^{\frac{3}{2}} - 8 \right) d\varphi \\
&= -\frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3(\varphi) - 1 \right) d\varphi \\
&= -\frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(\varphi)(1 - \cos^2(\varphi)) - 1 \right) d\varphi \\
&= -\frac{16}{3} \left[-\cos(\varphi) + \frac{1}{3} \cos^3(\varphi) - \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{8\pi}{3} - \frac{32}{9}.
\end{aligned}$$

4. a) Gebruik bolcoördinaten met $r = 3$:

$$\mathbf{X}(\varphi, \theta) = \left(3 \cos(\varphi) \sin(\theta), 3 \sin(\varphi) \sin(\theta), 3 \cos(\theta) \right).$$

De voorwaarde $z \geq 0$ geeft $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. De voorwaarde $x \geq 0$ geeft $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

b) Gebruik

$$\iint_S f \, d\Omega = \iint_D f(\mathbf{X}(u, v)) \|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\| \, d(u, v),$$

waarbij de $\mathbf{X}$ de parametrisering is van S met paramters $(u, v) \in D$.

Voor de parametrisering $\mathbf{X}$ van onderdeel a zijn de partiële afgeleiden gegeven door

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_\varphi(\varphi, \theta) &= \left(-3 \sin(\varphi) \sin(\theta), 3 \cos(\varphi) \sin(\theta), 0 \right) \\
\mathbf{X}_\theta(\varphi, \theta) &= \left(3 \cos(\varphi) \cos(\theta), 3 \sin(\varphi) \cos(\theta), -3 \sin(\theta) \right).
\end{aligned}$$

Er geldt $\langle \mathbf{X}_\varphi, \mathbf{X}_\theta \rangle = 0$, dus $\|\mathbf{X}_\varphi \times \mathbf{X}_\theta\| = \|\mathbf{X}_\varphi\| \cdot \|\mathbf{X}_\theta\|$:

$$\|\mathbf{X}_\varphi \times \mathbf{X}_\theta\| = 3 \sin(\theta) \cdot 3 = 9 \sin(\theta).$$

Dan (gebruik $x^2 + y^2 = 9 \sin^2(\theta)$)

$$\begin{aligned}
\iint_S (x^2 + y^2) z \, d\Omega &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \sin^2(\theta) \cdot 3 \cos(\theta) \cdot 9 \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi \\
&= 243 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\theta) \cos(\theta) \cdot d\theta \, d\varphi \\
&= 243\pi \left[\frac{1}{4} \sin^4(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{243\pi}{4}.
\end{aligned}$$

5. a) De kromme C is glad als er een parametrisering $\mathbf{x}$ bestaat zodat $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$ voor alle t .
Voor de gegeven parametrisering $\mathbf{x}$ van C geldt

$$\mathbf{x}'(t) = (\cos(t) - t \sin(t), 2t, \sin(t) + t \cos(t)) \neq (0, 0, 0)$$

voor alle $t \in [0, 4\pi]$. Dus C is een gladde kromme.

b)

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z e^{xy^2 z} & 2xyz e^{xy^2 z} & xy^2 e^{xy^2 z} \end{vmatrix}$$

Er geldt

$$\frac{\partial}{\partial y} xy^2 e^{xy^2 z} - \frac{\partial}{\partial z} 2xyz e^{xy^2 z} = e^{xy^2 z} \left((2xy - xy^2 \cdot 2xyz) - (2xy - 2xyz \cdot xy^2) \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} y^2 z e^{xy^2 z} - \frac{\partial}{\partial x} xy^2 e^{xy^2 z} = e^{xy^2 z} \left((y^2 - y^2 z \cdot xy^2) - (y^2 - xy^2 \cdot y^2 z) \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} 2xyz e^{xy^2 z} - \frac{\partial}{\partial y} y^2 z e^{xy^2 z} = e^{xy^2 z} \left((2yz - 2xyz \cdot y^2 z) - (2yz - y^2 z \cdot 2xyz) \right) = 0,$$

dus $\text{rot}(\mathbf{F}) = (0, 0, 0)$. Aangezien $\mathbf{F}$ continu differentieerbaar is op $\mathbb{R}^3$, en $\mathbb{R}^3$ is enkelvoudig samenhangend, is $\mathbf{F}$ conservatief.

- c) Het vectorveld dat we hier integreren is gelijk aan $\mathbf{F}(x, y, z) + (-z, 0, x)$. We integreren eerst $\mathbf{F}$. Een potentiaal van $\mathbf{F}$ is $f(x, y, z) = e^{xy^2 z}$, dus

$$\int_C \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = f(\mathbf{x}(3\pi)) - f(\mathbf{x}(0)) = f(4\pi, 16\pi^2, 0) - f(0, 0, 0) = e^0 - e^0 = 0.$$

Vervolgens

$$\begin{aligned} \int_C (-z dx + x dz) &= \int_0^{4\pi} \left(-t \sin(t) \cdot (\cos(t) - t \sin(t)) + t \cos(t) \cdot (\sin(t) + t \cos(t)) \right) dt \\ &= \int_0^{4\pi} \left(t^2 \sin^2(t) + t^2 \cos^2(t) \right) dt \\ &= \int_0^{4\pi} t^2 dt = \frac{1}{3} (4\pi)^3 = \frac{64\pi^3}{3}. \end{aligned}$$