

Uitwerkingen Deeltentamen Analyse 2, TW1070

13 april 2015, 9.00-11.00

1. a) (i) De verzameling $D \subset \mathbb{R}^n$ is *open* als voor ieder punt $\mathbf{a} \in D$ er een $r > 0$ bestaat zo dat $B(\mathbf{a}; r) \subset D$.
(ii) Het punt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ is een *randpunt* van $D \subset \mathbb{R}^n$ als voor iedere $r > 0$ geldt dat $B(\mathbf{a}; r) \cap D \neq \emptyset$ en $B(\mathbf{a}; r) \cap D^c \neq \emptyset$.
- b) Stel dat $\mathbf{a}$ een randpunt is dat wel in D ligt. Dan bestaat er een $r > 0$ zo dat $B(\mathbf{a}; r) \subset D$, want D is open. Maar dan geldt er $B(\mathbf{a}; r) \cap D^c = \emptyset$, en $\mathbf{a}$ is dus geen randpunt van D . Dit geeft een tegenspraak.
Conclusie: $\mathbf{a} \notin D$.
2. a) Definieer $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. Dan

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y^2}{0^2 + y^4} = 0,$$
$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}.$$

De gevraagde limiet bestaat dus niet.

- b) Met de driehoeksongelijkheid en $|x|, |y| \leq \|(x, y)\|$ volgt

$$\frac{|x^2 + xy^2|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|x^2| + |xy^2|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\|(x, y)\|^2 + \|(x, y)\|^3}{\|(x, y)\|} = \|(x, y)\| + \|(x, y)\|^2 \leq 2\|(x, y)\|.$$

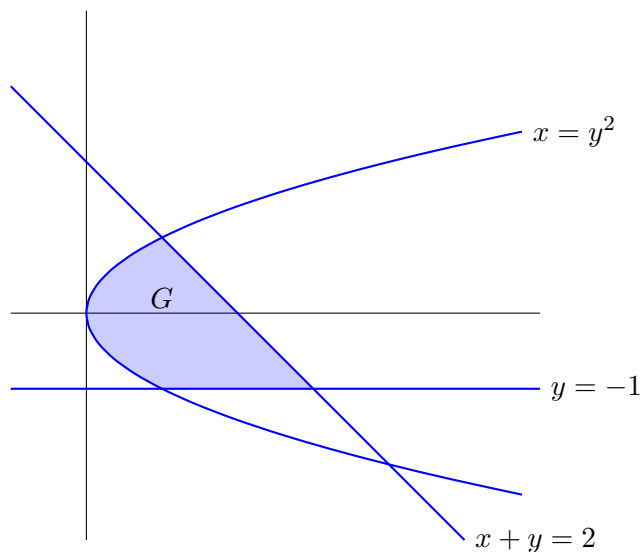
In de laatste stap gebruiken we dat $0 < t^2 < t$ als $t < 1$.

Zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\}$. Als $0 < \|(x, y)\| < \delta$, dan volgt uit bovenstaande afchatting dat

$$\frac{|x^2 + xy^2|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 2\|(x, y)\| < 2\delta = \varepsilon.$$

Conclusie: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

3. Het gebied G ziet er zo uit:



We zien dat we G kunnen beschrijven door

$$G = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1 \text{ en } y^2 \leq x \leq 2 - y\}.$$

Met de stelling van Fubini volgt dan

$$\begin{aligned} \iint_G xy^3 d(x, y) &= \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{2-y} xy^3 dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^3 \right]_{x=y^2}^{x=2-y} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left((2-y)^2 y^3 - y^7 \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(-y^7 + y^5 - 4y^4 + 4y^3 \right) dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 4y^4 dy \\ &= -2 \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_{-1}^1 = -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

4. a) f is differentieerbaar in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ als er een lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat zo dat

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

- b) Als f differentieerbaar is in $(2, 1)$ dan is de matrix van de lineaire afbeelding L uit de definitie gelijk aan $\nabla f(2, 1)$. We hebben

$$\nabla f(x, y) = (y + 1, x + 1) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(2, 1) = (2, 3).$$

Dan, met $\mathbf{a} = (2, 1)$ en $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$,

$$\begin{aligned} \frac{|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} &= \frac{|(3 + h_1)(2 + h_2) - 3 \cdot 2 - \langle (2, 3), (h_1, h_2) \rangle|}{\|\mathbf{h}\|} \\ &= \frac{|(6 + 2h_1 + 3h_2 + h_1 h_2) - 6 - (2h_1 + 3h_2)|}{\|\mathbf{h}\|} \\ &= \frac{|h_1 h_2|}{\|\mathbf{h}\|}. \end{aligned}$$

Met de $|h_1|, |h_2| \leq \|\mathbf{h}\|$ vinden we dan

$$\frac{|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \frac{\|\mathbf{h}\|^2}{\|\mathbf{h}\|} = \|\mathbf{h}\|.$$

Hieruit volgt dat

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(2 + h_1, 1 + h_2) - f(2, 1) - \langle \nabla f(2, 1), \mathbf{h} \rangle|}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$

en dus is f differentieerbaar in $(2, 1)$.

- c) Een parametervoorstelling voor het raakvlak is

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s, t) &= (2, 1, f(2, 1)) + s(1, 0, f_x(2, 1)) + t(0, 1, f_y(2, 1)) \\ &= (2, 1, 6) + s(1, 0, 2) + t(0, 1, 3). \end{aligned}$$

d) Met de kettingregel:

$$(g \circ f)'(2, 1) = g'(f(2, 1))f'(2, 1).$$

Er geldt

$$f'(2, 1) = (2, 3),$$

en

$$g'(t) = \begin{pmatrix} g'_1(t) \\ g'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g'(f(2, 1)) = g'(6) = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \cdot 6^3 \end{pmatrix}.$$

Nu volgt

$$(g \circ f)'(2, 1) = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \cdot 6^3 \end{pmatrix} (2 \ 3) = \begin{pmatrix} 24 & 36 \\ 8 \cdot 6^3 & 12 \cdot 6^3 \end{pmatrix}.$$

5. (a) We lossen op: $\nabla f(x, y) = (0, 0)$:

$$f_x(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4xy(2 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ of } y = 0 \text{ of } x = \pm\sqrt{2}.$$

Deze vullen we in in de vergelijking $f_y(x, y) = 0$:

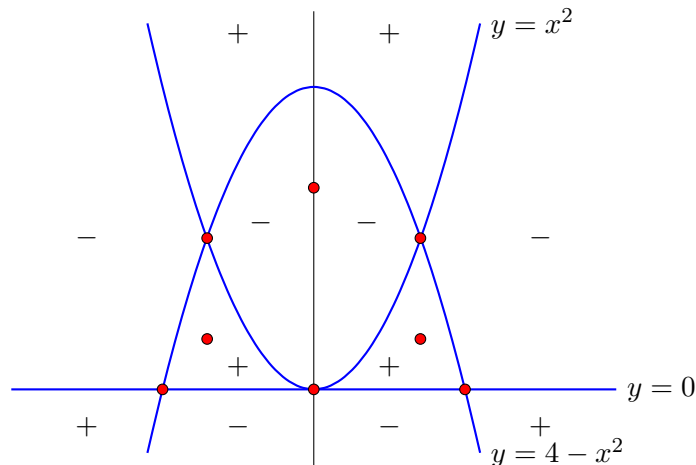
$$x = 0 : \quad y(3y - 8) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ of } y = \frac{8}{3}$$

$$y = 0 : \quad -x^2(x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ of } x = \pm 2$$

$$x = \pm\sqrt{2} : \quad 3y^2 - 8y + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6}.$$

We vinden dus de volgende stationaire punten: $(0, 0)$, $(0, \frac{8}{3})$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(\sqrt{2}, \frac{2}{3})$, $(\sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, \frac{2}{3})$ en $(-\sqrt{2}, 2)$.

(b) We maken een tekenoverzicht van f met daarin de stationaire punten. De nullijnen van f zijn $y = 0$, $y = x^2$ en $y = 4 - x^2$.



We lezen af dat alle stationaire punten die op nullijnen liggen, d.w.z. $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(\sqrt{2}, 2)$ en $(-\sqrt{2}, 2)$, zadelpunten zijn.

Het punt $(0, \frac{8}{3})$ ligt in een gebied dat begrensd wordt door nullijnen en waarop f negatief is, dus f heeft een lokaal minimum in $(0, \frac{8}{3})$.

Op dezelfde manier zien we dat f lokale maxima heeft in $(\sqrt{2}, \frac{2}{3})$ en $(-\sqrt{2}, \frac{2}{3})$.

Er zijn geen globale extremen, omdat (bijvoorbeeld)

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(0, y) = \infty \quad \text{en} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} f(0, y) = -\infty.$$