

Tentamen Analyse 2, TW1070 en WI1601

4 juli 2014, 9.00-12.00

- Een rekenmachine of formuleblad is niet toegestaan.
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- De punten per opgave staan in de kantlijn. Het cijfer wordt bepaald met de formule $\frac{\text{totaal} + 10}{10}$.

1. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

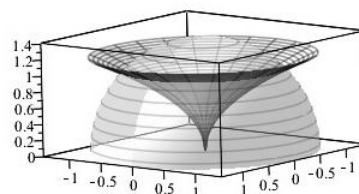
- (5) a) Bepaal $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ voor $(x, y) = (0, 0)$ en $(x, y) \neq (0, 0)$.
- (3) b) Maak de definitie af.
De functie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is *continu* in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, als ...
- (8) c) Onderzoek of $\frac{\partial f}{\partial x}$ continu is op $\mathbb{R}^2$.
- (4) d) Onderzoek of f differentieerbaar is op $\mathbb{R}^2$.

2. De functie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door $f(x, y) = e^{-xy}$, waarbij

$$D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

- (4) a) Bepaal en classificeer (minimum/maximum/zadelpunt) de stationaire punten van f op het inwendige van D .
- (9) b) Bepaal met behulp van multiplicatoren van Lagrange de extremen van f op de rand $\partial D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 = 1\}$.
- (2) c) Bepaal de plaats, aard en grootte van de extremen van f op D .

- (15) 3. $G \subset \mathbb{R}^3$ is het gebied boven het oppervlak $z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}$ dat binnen het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ligt.
Bereken het volume van G .



ZIE OMMEZIJDE VOOR VERVOLG

4. Zij $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ met $f(x, y) > 0$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Laat C een gladde kromme zijn in $\mathbb{R}^2$, dan is de verzameling $f(C)$ is een kromme in $\mathbb{R}^3$.

- (10) a) We kiezen voor C de kromme met parametrisering $(t^2, t^4 + t)$, $t \in [0, 5]$, dan is

$$\mathbf{x}(t) = (t^2, t^4 + t, f(t^2, t^4 + t)), \quad t \in [0, 5],$$

een parametrisering voor $f(C)$.

Geef een parametervoorstelling van de raaklijn aan $f(C)$ in $(1, 2, f(1, 2))$.

N.B.: Deze wordt uitgedrukt m.b.v. f en partiële afgeleiden van f !

- (10) b) Voor een gladde kromme C wordt het oppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in C \text{ en } 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Neem aan dat $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ een parametrisering is van C .

Parametriseer S m.b.v. $\mathbf{g}$ en toon aan dat

$$\text{Opp}(S) = \int_C f \, ds.$$

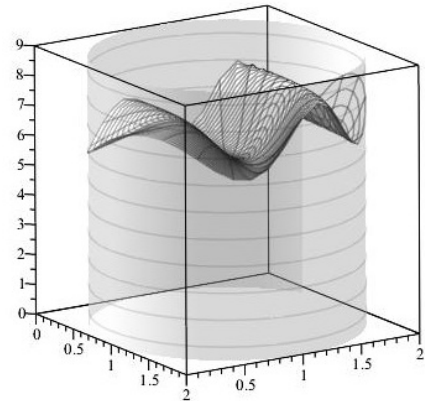
5. Het vectorveld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(-y((x-1)^2 + (y-1)^2)^{\frac{3301}{1729}}, x, z^2 \sin(z^2) \right).$$

De kromme $C_1 \subset \mathbb{R}^3$ is de cirkel $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ in het vlak $z = 0$.

De kromme $C_2 \subset \mathbb{R}^3$ is de snijkromme van het oppervlak S met vergelijking $z = \sqrt{x^2 + y^2} + \sin(x^2 + 3y^2) + 5$ en de cilinder $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, zie figuur.

C_1 en C_2 zijn beide van bovenaf gezien georiënteerd tegen de wijzers van de klok in.



- (10) a) Laat zien dat $\int_{C_1} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = 2\pi$.

- (4) b) Formuleer de integraalstelling van Stokes (inclusief alle voorwaarden).

- (6) c) Bereken $\int_{C_2} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds$.

Hint: gebruik onderdeel a.

EINDE