

Uitwerkingen Tentamen Analyse 2, TW1070 en WI1601

4 juli 2014, 9.00-12.00

1. a) Voor $(x, y) \neq (0, 0)$ gebruiken we de quotiëntregel:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot 2xy^2 - x^2y^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2) \cdot 2xy^2 - x^3y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Voor $(x, y) = (0, 0)$ gebruiken we de definitie van de partiële afgeleide:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

- b) De functie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is *continu* in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, als voor ieder $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat, zo dat $|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{a})| < \varepsilon$ als $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.
- c) Aangezien de som, het product en de samenstelling van continue functies weer continu is zijn de noemer $n(x, y) = x^3y^2 + 2xy^4$ en de teller $t(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ continue functie op $\mathbb{R}^2$. Het quotiënt van continue functies is continu in ieder punt waar de noemer niet nul is, dus f_x is continu op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

In $(0, 0)$ gebruiken we de definitie. We schrijven $\mathbf{x} = (x, y)$. Zij $\varepsilon > 0$, en kies (bijvoorbeeld) $\delta = \sqrt{\varepsilon/3}$. Als $\|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\| < \delta$, dan volgt met $|x| \leq \|\mathbf{x}\|$ en $|y| \leq \|\mathbf{x}\|$,

$$|f_x(\mathbf{x}) - f_x(\mathbf{0})| = \frac{|x^3y^2 + 2xy^4|}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{3\|\mathbf{x}\|^5}{\|\mathbf{x}\|^3} = 3\|\mathbf{x}\|^2 < 3\delta^2 = \varepsilon.$$

We zien dat f_x ook continu is in $(0, 0)$.

- d) Omdat $f(x, y) = f(y, x)$, is f_y ook continu op $\mathbb{R}^2$. Aangezien de partiële afgeleiden continu zijn, is f differentieerbaar op $\mathbb{R}^2$.
2. a) Er geldt $\nabla f(x, y) = (-ye^{xy}, -xe^{xy})$, dus het enige stationaire punt van f is $(0, 0)$. Er geldt $f(0, 0) = 1$, en ook $e^{-xy} < 1$ als $x > 0, y > 0$ en $e^{-xy} > 1$ als $x > 0$ en $y < 0$. We zien dat f geen lokaal extreem heeft in $(0, 0)$, dus f heeft een zadelpunt in $(0, 0)$.
- b) Definieer $G(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$, dan $\partial D = \{(x, y) : G(x, y) = 0\}$. ∂D is gesloten en begrensd, en f is continu, dus f neemt een minimum en een maximum aan op ∂D . We kunnen deze vinden m.b.v. de multiplier van Lagrange.

We lossen op:

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla G(x, y) \quad \text{en} \quad G(x, y) = 0,$$

ofwel

$$\begin{aligned} -ye^{-xy} &= 2\lambda x \\ -xe^{-xy} &= 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Uit de eerste twee vergelijkingen volgt

$$\begin{aligned} -\frac{e^{-xy}}{\lambda} &= 2\frac{x}{y} & \text{of} & & \lambda = y = 0 \\ -\frac{e^{-xy}}{\lambda} &= 8\frac{y}{x} & \text{of} & & \lambda = x = 0. \end{aligned}$$

Aangezien $x = 0, y = 0$ niet voldoet aan de derde vergelijking, geeft dit geen oplossing. We moeten nu dus oplossen

$$\frac{x}{y} = \frac{4y}{x} \quad \text{en} \quad x^2 + 4y^2 = 1.$$

De eerste vergelijking geeft $x^2 = 4y^2$ en invullen in de tweede geeft

$$8y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

en dus

$$x^2 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

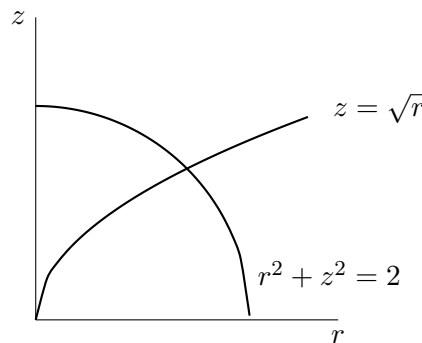
We vinden dus vier oplossingen:

$$\mathbf{x}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right), \quad \mathbf{x}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right), \quad \mathbf{x}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right), \quad \mathbf{x}_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right).$$

Er geldt $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_4) = e^{-\frac{1}{4}}$ en $f(\mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_3) = e^{\frac{1}{4}}$, dus f heeft een maximum op ∂D in $\mathbf{x}_2$ en $\mathbf{x}_3$, en een minimum in $\mathbf{x}_1$ en $\mathbf{x}_4$.

- c) Aangezien f continu is op D , en D is gesloten en begrensd, heeft f een globaal maximum en minimum. Uit onderdeel a volgt dat deze worden aangenomen op de rand. Bij onderdeel b hebben we uitgerekend waar deze liggen en wat de grootte is.

3. We beschrijven G m.b.v. cilindercoördinaten: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Het gebied G is dan het gebied ingesloten door de oppervlakken $z = \sqrt{r}$ en $r^2 + z^2 = 2$. In het rz -vlak:



Deze oppervlakken snijden elkaar in de kromme gegeven door $r^2 + (\sqrt{r})^2 = 2$. Oplossen van deze vergelijking geeft

$$r^2 + r - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r - 1)(r + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1 \text{ of } r = -2.$$

Aangezien r niet negatief is, wordt de snijkromme van de twee oppervlakken gegeven door $r = 1$. Het gebied G wordt dus in cilindercoördinaten:

$$H = \left\{ (r, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, \sqrt{r} \leq z \leq \sqrt{2-r^2} \right\}.$$

Het volume van G wordt dan (vergeet de Jacobiaan niet!):

$$\begin{aligned} \text{Vol}(G) &= \iiint_G d(x, y, z) = \iiint_H r \, d(r, \varphi, z) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{r}}^{\sqrt{2-r^2}} r \, dz \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_{\sqrt{r}}^{\sqrt{2-r^2}} \left(r\sqrt{2-r^2} - r\sqrt{r} \right) dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}r^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\sqrt{2} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{11}{15} \right). \end{aligned}$$

4. a) De kromme $f(C)$ heeft parametrisering

$$\mathbf{x}(t) = (t^2, t^4 + t, F(t)),$$

met $F(t) = f(t^2, t^4 + t)$. Om de raaklijn te bepalen hebben we de afgeleide naar t nodig:

$$\mathbf{x}'(t) = (2t, 4t^3 + 1, F'(t)).$$

Met de kettingregel vinden we

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2t f_x(t^2, t^4 + t) + (4t^3 + 1) f_y(t^2, t^4 + t).$$

De parametervoorstelling van de raaklijn in $(1, 2, f(1, 2))$ wordt nu

$$\mathbf{x}(1) + s\mathbf{x}'(1) = (1, 2, f(1, 2)) + s(2, 5, 2f_x(1, 2) + 5f_y(1, 2)), \quad s \in \mathbb{R}.$$

b) Een parametrisering voor S is

$$\mathbf{X}(t, z) = (\mathbf{g}(t), z) = (g_1(t), g_2(t), z)$$

met $a \leq t \leq b$ en $0 \leq z \leq f(\mathbf{g}(t))$. De partiële afgeleiden van $\mathbf{X}$ zijn

$$\mathbf{X}_t(t, z) = (\mathbf{g}'(t), 0)$$

$$\mathbf{X}_z(t, z) = (0, 0, 1).$$

Er geldt $\mathbf{X}_t \perp \mathbf{X}_z$, dus

$$\|\mathbf{X}_t \times \mathbf{X}_z\| = \|\mathbf{X}_t\| \cdot \|\mathbf{X}_z\| = \|\mathbf{g}'(t)\|.$$

Dan volgt

$$\begin{aligned}\text{Opp}(S) &= \iint_S d\Omega = \int_a^b \int_0^{f(\mathbf{g}(t))} \|\mathbf{X}_t \times \mathbf{X}_z\| dz dt = \int_a^b \int_0^{f(\mathbf{g}(t))} \|\mathbf{g}'(t)\| dz dt \\ &= \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \|\mathbf{g}'(t)\| dt = \int_C f ds.\end{aligned}$$

5. a) Op C_1 wordt $\mathbf{F}$ gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 0).$$

Een parametrisering van C_1 is

$$\mathbf{x}(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi],$$

en deze komt overeen met de oriëntatie. De afgeleide is

$$\mathbf{x}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

Hiermee vinden we

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} (\sin t + \sin^2 t + \cos t + \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \sin t + \cos t) dt = 2\pi\end{aligned}$$

De integraal over $\sin t$ en over $\cos t$ is gelijk aan nul, want we integreren over een hele periode.

b) Zij $U \subset \mathbb{R}^3$ open, en $\mathbf{F} \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$. Als $S \subset U$ een stuksgewijs glad oppervlak is met oriëntatie $\mathbf{n}$, en de randkromme ∂S heeft bijpassende oriëntatie $\boldsymbol{\tau}$, dan

$$\int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = \iint_S \langle \text{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle d\Omega.$$

c) Laat S de cilinder $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ zijn tussen de krommen C_1 en C_2 . We geven S de naar buiten gerichte oriëntatie $\mathbf{n}$. De randkromme ∂S bestaat uit C_1 en C_2 , waarbij C_1 tegen de wijzers van klok in georiënteerd is, en C_2 met de klok mee (van bovenaf gezien). De rotatie van $\mathbf{F}$ is

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & x & z^2 \sin(z^2) \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - \frac{\partial F_1}{\partial y}).$$

De normaalvector $\mathbf{n}$ op S is van de vorm $(a, b, 0)$, dus $\langle \text{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle = 0$ en dan

$$\iint_S \langle \text{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle d\Omega = 0.$$

Uit de stelling van Stokes volgt dan

$$\int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle = 0,$$

ofwel (let op de oriëntatie van C_2)

$$\int_{C_1} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds - \int_{C_2} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = 0.$$

Uit onderdeel a volgt dan

$$\int_{C_2} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = 2\pi.$$