Tentamen: Mechanica en Relativiteitstheorie – TN1530 TW

Datum: 17 April

Tijd/tijdsduur: 9:00-12:00 / 3 uur

Docenten: K.W.A. van Dongen, A.A. van Well, R.F. Mudde

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.

- Indien je het gehele tentamen maakt, maak dan opgaven 1 (25%), 2 (25%), 3 (25%), 4 (25%)
- Indien je het 2de deeltentamen maakt, maak dan opgaven 3 (33%), 4 (33%), 5 (33%)

Toegestane informatiebronnen en hulpmiddelen: rekenmachine, pen, geodriehoek / liniaal.

Geef steeds de berekening en/of redenering, niet enkel de uitkomst

Vermeld duidelijk op ieder vel: naam, studienummer, etc.

Vermeld op eerste vel of het gehele tentamen of alleen het 2de deeltentamen is gemaakt

Maak dit tentamen in blauwe of zwarte inkt. Geen potlood!

Veel succes!

Opgave 1

Twee ballen met puntmassa's $m_1=2m$ en $m_2=m$ met snelheden $v_1=+2v$ en $v_2=+v$, botsen volkomen elastisch met elkaar, zie figuur. De ballen bewegen alleen langs de x-as.

a) Bereken de snelheden u_1 en u_2 van beide ballen na de botsing zonder gebruik te maken van een Galilei transformatie.

b) Beschrijf een Galilei transformatie die zodanig is, dat na transformatie de snelheid van bal 2 voor de botsing gelijk is aan nul: $v_2' = 0$. Geef een uitdrukking voor x', t' en v_2'.

c) Bereken de snelheden u_1 en u_2 van beide ballen na de botsing door expliciet gebruik te maken van de Galilei transformatie bij onderdeel b).

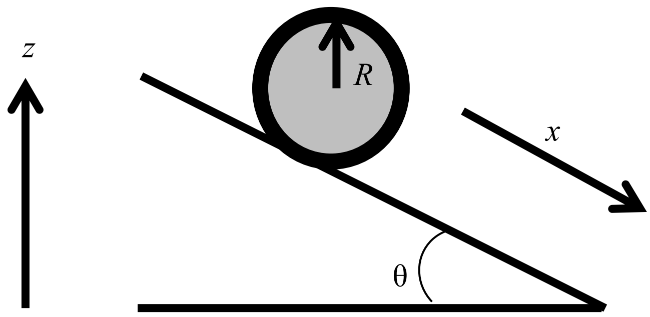
Een waarnemer ziet een nieuwe elastische botsing tussen de twee ballen gebeuren. Hij meet de snelheden van de ballen na afloop van de nieuwe botsing: $u_1=2$ en $u_2=5$.

d) Bereken de snelheden en de richtingen v_1 en v_2 die de ballen hadden voor de botsing.

Nu beschouwen we het probleem dat de waarnemer drie ballen met allen gelijke massa's m ziet; bal 1 beweegt naar links met snelheid $u_1=-u$, bal 2 beweegt niet ($u_2=0$), en bal 3 beweegt naar rechts met snelheid $u_3=+u$. Ook nu was de botsing volkomen elastisch.

e) Beredeneer wat de snelheden (grootte en richting) v_1, v_2 en v_3 die de ballen hadden voor de botsing.

Opgave 2



We nemen een holle cilinder met straal R, lengte L en massa M_c. In deze cilinder stoppen we een staaf met straal R, lengte L en massa M_s. De as van de staaf valt samen met de as van de cilinder en tevens zit de staaf vast in de cilinder. De cilinder met de staaf erin rolt vanuit stilstand een helling af. De helling maakt een hoek θ met de horizontaal.

a) Leid af dat het traagheidsmoment I van het complete systeem (cilinder met staaf) gelijk is aan $I = \left(M_c + \frac{1}{2}M_s\right)R^2$.
b) Leid af dat de wrijvingskracht die de cilinder ondervindt met het hellend vlak gelijk is aan $F_w = -\left(M_c + \frac{1}{2}M_s\right)\frac{d\dot{x}}{dt}$.
c) Leid de bewegingsvergelijking van het systeem af en los deze op.
d) Bereken de totale energie van het complete systeem (cilinder met staaf), differentieer deze naar de tijd, en deel tenslotte door de snelheid. Komt deze uitdrukking je bekend voor?

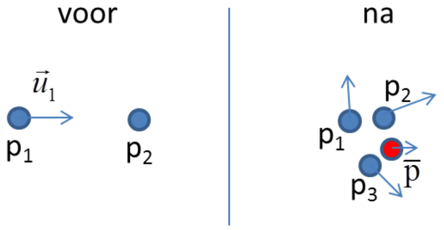
Opgave 3

Initiaalstelsel S*'* beweegt met snelheid V t.o.v. initiaalstelsel S in de positieve x-richting. In S' bevindt zich een lichtbron op $y' = L$. Deze zendt een lichtflits uit in negatieve y'-richting. Op het moment dat deze lichtflits de oorsprong van S' bereikt worden de klokken van S en S' gesynchroniseerd. Op dit moment kiezen we $x = x' = 0$. In de oorsprong van S' bevindt zich een spiegel die de lichtflits terugkaatst in positieve y'-richting. Noem het uitzenden van de lichtflits Event1 en het terug ontvangen voor de flits ter plaatse van de lichtbron Event2.

a) Geef de tijd-positie viervector van Event1 en Event2 in S'.
b) Geef de tijd-positie viervector van Event1 en Event2 in S.
c) Toon aan dat het interval van de oorsprong naar Event2 lichtachtig is, zowel in S als S'.

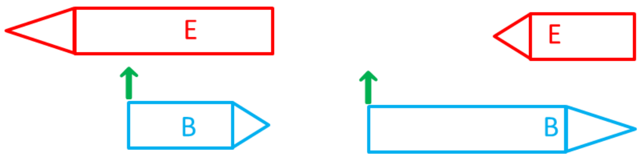
Opgave 4

Een proton (p_1) met voldoende energie botst met een proton in rust (p_2) en produceert daarbij een extra proton (p_3) en anti-proton ($\overline{\mathrm{p}}$). Zie figuur. Alle hebben dezelfde massa m.



a) Geef voor het labsysteem (figuur) de impuls-viervectoren van p_1 (snelheid $\vec{u}_1$) en p_2 vóór de botsing.
b) Wat is de kinetische energie van p_1?
c) Wat is de totale impuls-viervector vóór de botsing in het centre-of-mass systeem (CM) systeem?
d) Bereken hieruit de minimale grootte van de snelheid V van beide deeltjes vóór de botsing (in CM systeem) om deze reactie (productie van proton-antiproton paar) mogelijk te maken.

Opgave 5



McCoy Kirk

Een Klingon battleship (B) heeft aan zijn achterkant een phaserkanon dat alleen maar kan vuren in de richting loodrecht op zijn voortplantingsrichting. De standaard Klingontactiek is vlak langs de tegenstander te vliegen (in tegengestelde richting) en dan te vuren als zijn voorkant de achterkant van zijn tegenstander passeert. We veronderstellen dat beide schepen zo dicht langs elkaar vliegen dat de tijd die de phaserbundel nodig om van het kanon naar het doel te komen kan worden verwaarloosd.
De Enterprise (E), die dezelfde lengte L_0 als het battleship heeft wanneer beide in rust zijn, wordt aangevallen. Captain Kirk en dr McCoy beginnen een discussie, zie figuur. McCoy zegt dat B korter is dan E door Lorentzcontractie en daarom raak zal schieten. Kirk daarentegen beweert dat E korter is dan B, gezien vanuit B, dus dat niemand zich druk hoeft te maken.
Kirk: 'Zij schieten, dus je moet het vanuit hun intertiaalstelsel bekijken'
McCoy: 'Ben je gek? Wij worden beschoten, dus ons inertiaalstelsel is hetgene dat ertoe doet'.

De vraag is wie er gelijk heeft.

We noemen het stelsel van de Enterprise S en dat van het battleship S' en de richting waarin het battleship nadert (met snelheid *V*) is de *x*-richting. We synchroniseren de klokken op het moment dat de voorkant van B de achterkant van E passeert (hier geldt $x=x'=0$ en $t=t'=0$, dit noemen we Event1). Event2 wordt gegeven door de achterkant van B die volgens S gelijktijdig is aan Event1. Event3 wordt gegeven door de achterkant van B die volgens S' gelijktijdig is aan Event1 en dus de plaats en moment is waarop het kanon vuurt. Event4 beschrijft de voorkant van E op moment van afvuren van het kanon, volgens S, en Event5 de voorkant van E op moment van afvuren van het kanon, volgens S'.

a) Geef Event2 volgens S, (ct,x), en S', (ct',x').
b) Bereken de invariant ('lengte') van de ruimte-plaats viervector, behorende bij Event2 in S en S'.
c) Geef Event3 volgens S en S'.
d) Geef Event4 volgens S en S'.
e) Geef Event5 volgens S en S'.
f) Leg uit wie gelijk heeft, Kirk of McCoy. Met andere woorden wordt de Enterprise geraakt of niet?

UITWERKINGEN

1a) De botsing is volkomen elastisch dus er geldt behoud van energie en impuls.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(2m)(2v)^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(2m)u_1^2+\frac{1}{2}mu_2^2 \\ (2m)(2v)+mv=(2m)u_1+mu_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9v^2=2u_1^2+u_2^2 \\ 5v=2u_1+u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ u_2=5v-2u_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ u_2^2=25v^2+4u_1^2-20vu_1 \end{cases}$$

$$9v^2=2u_1^2+25v^2+4u_1^2-20vu_1 \Rightarrow 6u_1^2-20vu_1+16v^2=0 \Rightarrow 3u_1^2-10vu_1+8v^2=0$$

$$\Rightarrow u_1=\frac{10v\pm\sqrt{100v^2-96v^2}}{6}=\frac{5v\pm v}{3}=\left(\frac{4}{3}v,2v\right) \Rightarrow u_2=\left(\frac{7}{3}v,v\right)$$

$(u_1,u_2)=(2v,v)$ (oplossing van voor de botsing)

of

$\boxed{(u_1,u_2)=\left(\frac{4}{3}v,\frac{7}{3}v\right)}$ (oplossing van na de botsing)

1b) Galilei transformatie: $x'=x-vt\ ;\ t'=t \Rightarrow v_1'=v,\ v_2'=0$

1c) Galilei transformatie: $x'=x-vt\ ;\ t'=t \Rightarrow v_1'=v,\ v_2'=0$

De botsing is volkomen elastisch dus er geldt behoud van energie en impuls.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(2m)v^2=\frac{1}{2}(2m)u_1^2+\frac{1}{2}mu_2^2 \\ (2m)v=(2m)u_1+mu_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v^2=2u_1^2+u_2^2 \\ 2v=2u_1+u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ u_2=2v-2u_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ u_2^2=4v^2-8vu_1+4u_1^2 \end{cases}$$

$$2v^2=2u_1^2+4v^2-8vu_1+4u_1^2 \Rightarrow 6u_1^2-8vu_1+2v^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1=\frac{8v\pm\sqrt{64v^2-48v^2}}{12}=\frac{8v\pm4v}{12}=\left(\frac{1}{3}v,v\right) \Rightarrow u_2=\left(\frac{4}{3}v,0\right)$$

$(u_1,u_2)=(v,0)$ (oplossing van voor de botsing)

of

$\boxed{(u_1,u_2)=\left(\frac{1}{3}v,\frac{4}{3}v\right)}$ (oplossing van na de botsing)

Na terug transformatie:

$\boxed{(u_1,u_2)=\left(\frac{4}{3}v,\frac{7}{3}v\right)}$

1d) De botsing was volkomen elastisch dus er geldt behoud van energie en impuls.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(2m)v_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}(2m)4+\frac{1}{2}m25=\frac{1}{2}(33)m \\ (2m)v_1+mv_2=(2m)2+m5=9m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1^2+v_2^2=33 \\ v_2=9-2v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ v_2^2=81-36v_1+4v_1^2 \end{cases}$$

$$2v_1^2+81-36v_1+4v_1^2=33 \Rightarrow 8-6v_1+v_1^2=0$$

$$\Rightarrow (v_1-2)(v_1-4)=0 \Rightarrow v_1=(2,4)$$

$(v_1,v_2)=(2,5)$ (oplossing van na de botsing)

of

$\boxed{(v_1,v_2)=(4,1)}$ (oplossing van voor de botsing)

e) Er moet wederom gelden dat energie en impuls behouden waren. Omdat de middelste bal stil ligt, hebben de drie ballen op hetzelfde moment moeten botsen. Op basis van symmetrie moet dan gelden dat de ballen 1 en 3 een gelijke maar tegengestelde snelheid moeten hebben gehad. Dus $v_1=u$, $v_2=0$, en $v_3=-u$.

Opgave 2

3a) $I=\sum_i m_i r_i^2$

Holle cilinder

$$I=\sum_i m_i r_i^2 = R^2\sum_i m_i = M_c R^2 \Rightarrow \boxed{I_{cyl}=M_c R^2}$$

Staaf

massa in 1 ring: $dm=\rho\, 2\,\pi\, r\, L\, dr=\dfrac{M_s}{L\pi R^2}2\,\pi\, r\, L\, dr=\dfrac{M_s}{R^2}2\, r\, dr$

$$I=\sum_i m_i r_i^2=\int_0^R r^2 dm=\int_0^R r^2\frac{M_s}{R^2}2\, r\, dr=\frac{1}{2}M_s R^2 \Rightarrow \boxed{I_s=\frac{1}{2}M_s R^2}$$

Totale traagheidsmoment: $I=I_{cyl}+I_s=M_cR^2+\frac{1}{2}M_sR^2=\left(M_c+\frac{1}{2}M_s\right)R^2 \Rightarrow \boxed{I=\left(M_c+\frac{1}{2}M_s\right)R^2}$

3b) Als gevolg van de wrijvingskracht zal het systeem de helling af rollen met een toenemende hoeksnelheid ω.

$$\left.\begin{array}{l} I\dfrac{d\omega}{dt}=-RF_w \\ I=\left(M_c+\frac{1}{2}M_s\right)R^2 \\ \dot{x}=\omega R \end{array}\right\} \quad \frac{-\left(M_c+\frac{1}{2}M_s\right)R^2}{R}\frac{d\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)}{dt}=F_w \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_w=-\left(M_c+\frac{1}{2}M_s\right)\frac{d\dot{x}}{dt}}$$

3c) $M=M_c+M_s$

$$\left.\begin{array}{l} M\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}_g+\vec{F}_w \\ F_w=-\left(M_c+\frac{1}{2}M_s\right)\dfrac{d\dot{x}}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad M\frac{d\dot{x}}{dt}=Mg\sin(\theta)-\left(M_c+\frac{1}{2}M_s\right)\frac{d\dot{x}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{Mg\sin(\theta)}{M+M_c+\frac{1}{2}M_s}}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} \dot{x}(t)=\dfrac{Mg\sin(\theta)}{M+M_c+\frac{1}{2}M_s}t+K \\ \dot{x}(t=0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \dot{x}(t)=\frac{Mg\sin(\theta)}{M+M_c+\frac{1}{2}M_s}t$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} x(t)=\dfrac{1}{2}\dfrac{Mg\sin(\theta)}{M+M_c+\frac{1}{2}M_s}t^2+K \\ x(t=0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{x(t)=\frac{1}{2}\frac{Mg\sin(\theta)}{M+M_c+\frac{1}{2}M_s}t^2}$$

3d) $E = E_{kin} + E_{rot} + E_{pot} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgz = const$

$z = -x\sin(\theta)$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgz\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(M_c + \frac{1}{2}M_s\right)R^2\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 - Mgx\sin(\theta)\right]$$

$$= M\dot{x}\ddot{x} + \left(M_c + \frac{1}{2}M_s\right)\dot{x}\ddot{x} - Mg\dot{x}\sin(\theta)$$

$$= \left(M + M_c + \frac{1}{2}M_s\right)\dot{x}\ddot{x} - Mg\dot{x}\sin(\theta) = 0$$

$$\left(M + M_c + \frac{1}{2}M_s\right)\ddot{x} = Mg\sin(\theta) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\ddot{x} = \frac{Mg\sin(\theta)}{\left(M + M_c + \frac{1}{2}M_s\right)}}$$

---

opgave 3

a) S': $(ct_1', x_1', y_1', z_1') = (-L, 0, L, 0)$
$(ct_2', x_2', y_2', z_2') = (L, 0, L, 0)$

b) S: $(ct_1, x_1, y_1, z_1) = (-\gamma L, -\gamma\beta L, L, 0)$
$(ct_2, x_2, y_2, z_2) = (\gamma L, \gamma\beta L, L, 0)$

c) Interval vier-vector in S': $d\vec{s}' = \vec{X}_2' - \vec{O}' = \vec{X}_2'$
$ds'^2 = (ct_2')^2 - x_2'^2 - y_2'^2 - z_2'^2 = L^2 - 0 - L^2 - 0 = 0$ dus lichtachtig

$d\vec{s} = \vec{X}_2 - \vec{O} = \vec{X}_2$

Interval vier-vector in S: $ds^2 = (ct_2)^2 - x_2{}^2 - y_2{}^2 - z_2{}^2 = \gamma^2L^2 - \gamma^2\beta^2L^2 - L^2 - 0 =$
$\gamma^2(1-\beta^2)L^2 - L^2 = 0$

---

opgave 4

a) Kies x-as in richting van $\vec{u}_1$. Dan $\vec{P}_1 = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(m\gamma(u_1)c, m\gamma(u_1)u_1, 0, 0\right)$ en

$\vec{P}_2 = (mc, 0, 0, 0)$

b) $E_{kin} = E - mc^2 = \left(\gamma(u_1) - 1\right)mc^2$

c) Omdat beide massa's hetzelfde zijn naderen in CM systeem de deeltjes elkaar met snelheid V in tegengestelde richting. Deze V is als volgt uit te rekenen. Het CM systeem (S') beweegt met snelheid V tov labsysteem (S). Totale impuls-viervector $\vec{P}_{tot,voor}^{CM} = \left(2m\gamma(V)c, 0, 0, 0\right)$. Via LT geldt

$$P'^1 = \gamma(V)\left(P_{voor}^1 - \frac{V}{c}P_{voor}^0\right) = \gamma(V)\left(m\gamma(u_1)u_1 - \frac{V}{c}m\left(\gamma(u_1)+1\right)c\right) = 0$$

Dus $\quad V = \dfrac{\gamma(u_1)}{\gamma(u_1)+1}u_1$

d) Minimale energie als alle deeltjes na de botsing stil staan. Dan is de impuls-viervector na de botsing $\vec{P}^{CM}_{tot,na} = (4mc,0,0,0)$. Behoud van impuls-viervector: $2m\gamma(V)c \geq 4mc$ ofwel $\gamma(V) \geq 2 \rightarrow \frac{1}{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} \geq 4 \rightarrow 1-\left(\frac{V}{c}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{V}{c}\right)^2 \geq \frac{3}{4} \rightarrow \mathrm{V} \geq \frac{1}{2}c\sqrt{3}$

opgave 5

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

a), c) t/m e):

	S	S'
	(ct,x)	(ct',x')
$E1$	$(0,0)$	$(0,0)$
$E2$	$\left(0,-\frac{L_0}{\gamma}\right)$	$(\beta L_0,-L_0)$
$E3$	$(-\gamma\beta L_0,-\gamma L_0)$	$(0,-L_0)$
$E4$	$(-\gamma\beta L_0,-L_0)$	$(-\gamma^2\beta L_0+\gamma\beta L_0,-\gamma L_0+\gamma^2\beta^2 L_0)$
$E5$	$(-\beta L_0,-L_0)$	$\left(0,-\frac{L_0}{\gamma}\right)$

b) S: $X^2 = (ct)^2 - x^2 = 0 - \frac{L_0^2}{\gamma^2}$

S: $X'^2 = (ct')^2 - x'^2 = \beta^2 L_0^2 - L_0^2 = -\frac{L_0^2}{\gamma^2}$

f) E3 is afschieten van kanon. In S: E3 vergelijken met E4 $\rightarrow$ gelijktijdig ($ct_3 = ct_4$) maar $x_3 < x_4 \rightarrow$ raket mist de Enterprise; In S': E3 vergelijken met E5$\rightarrow$ gelijktijdig ($ct'_3 = ct'_5$) maar $x'_3 < x'_5 \rightarrow$ raket mist de Enterprise. Conclusie: Captain Kirk heeft gelijk!