Uitwerkingen tentamen lineaire algebra 2
13 januari 2017, 10:00 – 13:00

Hint: Alle karakteristiek polynomen die je nodig zou kunnen hebben, hebben gehele nulpunten. Als dat niet het geval lijkt, dan heb je dus ergens een rekenfout gemaakt.

Opgave 1. (5 punten) Schrijf bovenaan de eerste pagina van je antwoorden je naam, je emailadres, je universiteit (Leiden of Delft) en je Leidse studentnummer.

Opgave 2. (10 punten) Beschouw de reële matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de Jordannormaalvorm van A, inclusief de bijbehorende basistransformatie. Dat wil zeggen, geef een inverteerbare matrix Q en een matrix J in Jordan-normaalvorm zodanig dat $A = QJQ^{-1}$.

Oplossing. De matrix is een bovendriehoeksmatrix, dus het karakteristiek polynoom is $(t-2)(t+1)^4$ en de eigenwaarden zijn 2 en -1. De dimensies van de gegeneraliseerde eigenruimtes zijn gelijk aan de algebraïsche multipliciteiten, dus aan 1 respectievelijk 4.

De dimensie van de eigenruimte behorende bij een eigenwaarde is minstens 1, dus voor de eigenwaarde $\lambda = 2$ is de bijbehorende eigenruimte gelijk aan de gegeneraliseerde eigenruimte, want ze hebben dus beide dimensie 1. Deze ruimte is $\ker(A - 2I)$ en omdat de eerste kolom van $A - 2I$ gelijk is aan 0, is de standaard basisvector e_1 bevat in deze kern, dus de gegeneraliseerde eigenruimte wordt voortgebracht door $w_0 = e_1$.

Voor de eigenwaarde $\lambda = -1$ is $A - \lambda I = A + I$ een bovendriehoeksmatrix, dus de machten ervan ook en we hoeven alleen de coëfficienten boven de diagonaal uit te rekenen. We vinden

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A+I)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en

$$(A+I)^3 = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 & 27 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Omdat $(A + I)^3$ rang 1 heeft, geldt $\dim \ker(A + I)^3 = 5 - 1 = 4$. Omdat de gegeneralisserde eigenruimte dimensie 4 heeft, is $\ker(A + I)^3$ al de hele gegeneraliseerde eigenruimte. De kernen $\ker(A + I)^n$ voor $n = 1, 2, 3$ zijn makkelijk te bepalen, want $(A + I)^n$ is al in row echelon vorm. We vinden

$$\begin{aligned} \ker(A+I) &= L\big((-1,1,0,0,0), (-1,0,1,0,0)\big), \\ \ker(A+I)^2 &= L\big((-1,1,0,0,0), (-1,0,1,0,0), (-1,0,0,1,0)\big), \\ \ker(A+I)^3 &= L\big((-1,1,0,0,0), (-1,0,1,0,0), (-1,0,0,1,0), (-1,0,0,0,1)\big). \end{aligned}$$

Voor de dimensie $r_n = \dim(A+I)^n$ hebben we dus $r_1 = 2$ en $r_2 = 3$ en $r_3 = 4$. Er zijn dus $r_1 = 2$ Jordanblokken, waarvan er $r_2 - r_1 = 1$ grootte minstens 2 heeft en $r_3 - r_2 = 1$ grootte minstens 3 heeft. Dat betekent dat er twee Jordanblokken voor eigenwaarde $\lambda = -1$ zijn: één van groote 1×1 en één van grootte 3×3. Voor het grootste blok kiezen we een complementaire ruimte van $\ker(A+I)^2$ binnen $\ker(A+I)^3$; deze complementaire ruimte heeft dimensie $r_3 - r_2 = 1$, dus we hoeven maar één vector te kiezen: een vector in $\ker(A+I)^3$ die niet in $\ker(A+I)^2$ zit, dus bijvoorbeeld $w_1 = (-1,0,0,0,1)$. De andere twee vectoren die bij het 3×3 blok horen zijn dan $(A+I)w_1 = (0,-1,0,1,0)$ en $(A+I)^2 w_1 = (0,-1,1,0,0)$.

Een complementaire ruimte voor $\ker(A+I)$ binnen $\ker(A+I)^2$ heeft ook dimensie $r_2 - r_1 = 1$ en wordt dus al voortgebracht door $(A+I)w_1$. Een complementaire ruimte voor $\ker(A+I)^0 = \{0\}$ binnen $\ker(A+I)$ is gelijk $\ker(A+I)$; we hebben al een vector, namelijk $(A+I)^2 w_1 = (0,-1,1,0,0)$, dus om samen hiermee de ruimte $\ker(A+I)$ op te spannen kiezen we bijvoorbeeld $w_2 = (-1,1,0,0,0)$. Deze vector hoort bij het 1×1 blok.

De vectoren $w_0, (A+I)^2 w_1, (A+I)w_1, w_1, w_2$ vormen een basis B. Zetten we deze vectoren in deze volgorde als kolommen in een matrix, dan krijgen we

$$Q = [\mathrm{id}]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

waarbij E de standaardbasis is. De bijbehorende Jordannormaalvorm is dan

$$J = [f_A]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Er geldt dan inderdaad dat $QJQ^{-1} = [\mathrm{id}]_E^B \cdot [f_A]_B^B \cdot [\mathrm{id}]_B^E = [f_A]_E^E = A$.

Opgave 3. (8 punten) Zij $V = \mathrm{Mat}(2 \times 3, \mathbf{R})$ de vectorruimte van 2×3 matrices. Zij $U \subset V$ de deelruimte van alle matrices $M \in V$ waarvoor de vector $(1,1,1)^\top$ in de kern zit, dat wil zeggen, U is de deelruimte van alle matrices $M \in V$ waarvoor de som van de kolommen gelijk is aan $(0,0)^\top$.

(a) Laat zien dat de afbeelding $b \colon V \times V \to \mathbf{R}$ gegeven door

$$b(A,B) = \mathrm{tr}(AB^\top)$$

een inproduct op V geeft.

(b) Wat is de dimensie van U?

(c) Geef een orthonormale basis voor U.

Oplossing.

(a) Schrijf

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}.$$

Dan is de diagonaal van $AB^\top$ gelijk aan

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & \cdots \\ \cdots & a_4b_4 + a_5b_5 + a_6b_6 \end{pmatrix}$$

en het spoor daarvan is $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5 + a_6b_6$. Dit betekent dat onder het isomorfisme $f \colon V \to \mathbf{R}^6$ dat bovenstaande matrix A stuurt naar $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$, de afbeelding $b \colon V \times V \to \mathbf{R}$ overeen komt met het standaard inproduct op $\mathbf{R}^6$. Dit bewijst dat b een inproduct is, waarmee onderdeel (a) is beantwoord.

Als alternatief is het ook direct duidelijk dat de uitdrukking $b(AB^\top) = \sum_{i=1}^6 a_i b_i$ lineair in zowel de a_i (bij vaste b_j), als in de b_j (bij vaste (a_i) is, dat de uitdrukking symmetrisch is in A en B, en dat $b(AA^\top) = \sum_{i=1}^6 a_i^2 \geq 0$ met gelijkheid dan en slechts dan als $a_i = 0$ voor alle i, dus voor $A = 0$.

(b) Onder het isomorfisme $f\colon V \to \mathbf{R}^6$ komt U overeen met de deelruimte gegeven door $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ en $a_4 + a_5 + a_6 = 0$. Dit zijn twee lineair onafhankelijke vergelijkingen, dus U heeft dimensie $6 - 2 = 4$.

Als alternatief geeft vermenigvuldiging met de vector $x = (1, 1, 1)$ een lineaire afbeelding

$$\sigma\colon V \to \mathbf{R}^2, \qquad A \mapsto Ax,$$

waarbij nu x dus vast en A de variabele is! Er geldt $U = \ker \sigma$. Omdat σ surjectief is, heeft het beeld dimensie $\dim \mathbf{R}^2 = 2$, dus $\dim U = \dim \ker \sigma = \dim V - \dim \mathrm{im}\sigma = 6 - 2 = 4$.

Nog een alternatief bestaat uit het geven van een basis, zeg B, bestaande uit de matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Het is duidelijk dat de matrices lineair onafhankelijk zijn en ze spannen U op omdat voor

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \in U$$

geldt $a_3 = -a_1 - a_2$ en $a_6 = -a_4 - a_5$, dus $A = \sum_{i=1}^6 a_i A_i$. De dimensie van U is dan het aantal elementen van B, dus 4.

(c) We gebruiken Gram-Schmidt. Definieer $B_1 = A_1$ en

$$B_2 = A_2 - \frac{b(A_2, B_1)}{b(B_1, B_1)} B_1 = A_2 - \frac{1}{2} B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De matrix A_3 staat al loodrecht op B_1 en B_2, dus we krijgen $B_3 = A_3$. De matrix A_4 staat ook al loodrecht op B_1 en B_2, dus we krijgen

$$B_4 = A_4 - \frac{b(A_4, B_3)}{b(B_3, B_3)} B_3 = A_4 - \frac{1}{2} B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Nu moeten we nog normaliseren en krijgen we een orthonormale basis bestaande uit de matrices

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ C_2 &= \frac{1}{\sqrt{3/2}} B_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ C_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} B_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ C_4 &= \frac{1}{\sqrt{3/2}} B_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Opgave 4. (9 punten) Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat de dimensie van de kern van A gelijk is aan 1.

(b) Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonaalmatrix D zodanig dat er geldt $A = Q^\top DQ$.

(c) Bepaal de rang en de signatuur van de bilineaire vorm $\varphi\colon \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ gegeven door $(x, y) \mapsto y^\top Ax$.

Oplossing.

(a) Om breuken te voorkomen, delen we de middelste rij door -2 en wisselen we die met de bovenste rij. Daarna geeft het standaard vegen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 18 & 9 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix heeft rang 2, dus de kern heeft inderdaad dimensie 1.

(b) We bepalen eerst de eigenruimtes, die wegens de spectraalstelling (Stelling 10.9 uit het dictaat) loodrecht op elkaar staan omdat A symmetrisch is. Het karakteristiek polynoom van A is de determinant van

$$tI - A = \begin{pmatrix} t-5 & 2 & -4 \\ 2 & t-8 & -2 \\ -4 & -2 & t-5 \end{pmatrix}.$$

Ontwikkelen langs de eerste rij geeft

$$\begin{aligned}
&(t-5)\cdot\big((t-8)(t-5)-(-2)(-2)\big) - 2\cdot\big(2(t-5)-(-2)(-4)\big) + (-4)\cdot\big((2)(-2)-(-4)(t-8)\big) \\
&= (t-5)(t-8)(t-5) - 4(t-5) - 4(t-5) + 16 + 16 - 16(t-8) \\
&= t^3 - 18t^2 + 105t - 200 - 8t + 40 + 32 - 16t + 128 \\
&= t^3 - 18t^2 + 81t = t(t-9)^2.
\end{aligned}$$

Je kunt je berekening testen: wegens (a) moet 0 een nulpunt zijn en wegens de opmerking bovenaan het tentamen moeten alle nulpunten geheel zijn.

De eigenruimte bij $\lambda = 0$ is de kern $\ker A$, die we aflezen uit de row echelonvorm van A die we in (a) hebben bepaald. Deze eigenruimte wordt dus voortgebracht door $(2, 1, -2)$. Normaliseren geeft de eenheidsvector $v_1 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$.

De eigenruimte bij $\lambda = 9$ is de kern van

$$A - 9I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Een row echelonvorm voor deze matrix is

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

waaruit we kunnen aflezen dat de eigenruimte wordt voortgebracht door $w_1 = (1, 0, 1)$ en $w_2 = (1, -2, 0)$. Binnen deze eigenruimte passen we Gram-Schmidt toe om een orthonormale basis voor de eigenruimte te vinden. We vinden w_1 en $w_2 - \frac{\langle w_2, w_1 \rangle}{w_1, w_1} w_1 = w_2 - \frac{1}{2} w_1 = \frac{1}{2}(1, -4, -1)$. Na normaliseren wordt dit $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ en $v_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -4, -1)$.

Onze nieuwe basis wordt $B = v_1, v_2, v_3$ en omdat dit een orthonormale basis is, is de matrix $Q = [\mathrm{id}]_B^E$ orthogonaal, dus $Q^{-1} = Q^\top$. Voor de diagonaalmatrix

$$D = [f_A]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

vinden we $A = [f_A]_E^E = [\mathrm{id}]_E^B \cdot [f_A]_B^B \cdot [\mathrm{id}]_B^E = Q^{-1}DQ = Q^\top DQ$. Dat betekent dat $Q^\top = [\mathrm{id}]_E^B$ de matrix is waarin de basisvectoren van B als kolommen staan, dus in Q staan ze als rijen:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(c) De rang is 2 en de signatuur is het verschil tussen het aantal positieve eigenwaarden en het aantal negatieve, dus $2 - 0 = 2$.

Opgave 5. (6 punten) Zij $V \subset \mathbf{R}^3$ een vlak dat het punt $(0,0,0)$ bevat. Zij $\pi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de projectie-afbeelding op V. Laat zien dat π wordt gegeven door een symmetrische matrix.
[Herinnering: de lineaire afbeelding π stuurt een element $x \in \mathbf{R}^3$ naar het unieke element $v \in V$ waarvoor geldt dat $x - v$ loodrecht staat op alle elementen van V.]

Oplossing. Omdat de standaardbasis een orthonormale basis is, wordt π gegeven door een symmetrische matrix dan en slechts dan als π zelf-geadjungeerd is (self adjoint), wegens Corollary 9.22. Dat kunnen we dan om dezelfde reden ook aflezen aan het wel of niet symmetrisch zijn van de matrix geassocieerd aan π ten opzichte van een andere orthonormale basis. Nemen we hiervoor bijvoorbeeld een basis die bestaat uit een orthonormale basis voor V met daaraan toegevoegd een normaal voor V van lengte 1, dan is de bijbehorende matrix gelijk aan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix is symmetrisch, dus π is inderdaad zelf-geadjungeerd, dus is ook de matrix ten opzichte van de (orthonormale) standaardbasis symmetrisch. Overigens is dit een specifiek geval van werkcollegeopgave 9.10, waar ditzelfde gevraagd werd voor willekeurige dimensie. Het lijkt, inclusief bewijs, ook erg op opgave 7 van het hertentamen van vorig jaar, wat we behandeld hebben tijdens het laatste college.

Als alternatief kunnen we de sterkere stelling 10.8 gebruiken. Eerst gebruiken we net als hierboven dat π gegeven wordt door een symmetrische matrix dan en slechts dan als π zelf-geadjungeerd is. Dan zegt Stelling 10.8 dat dit het geval is dan en slechts dan als $\mathbf{R}^3$ een orthonormale basis van eigenvectoren voor π heeft, wat het geval is, namelijk dezelfde basis als hierboven beschreven. Merk op dat we alleen de makkelijke kant van 10.8 gebruiken, en dat is precies wat we in bovenstaande oplossing gebruikt hebben.

Als tweede alternatief kunnen we ook expliciet checken dat π zelf-geadjungeerd is. Zij a een normaal voor V van lengte 1. Dan geldt er $\pi(x) = x - \langle a, x\rangle a$ voor alle $x \in V$. Dus voor alle $x, y \in V$ geldt

$$\langle \pi(x), y\rangle = \langle x - \langle a, x\rangle a, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle a, x\rangle \cdot \langle a, y\rangle.$$

Deze laatste uitdrukking is symmetrisch in x en y. Omdat het standaard inproduct ook symmetrisch is, vinden we dus

$$\langle \pi(x), y\rangle = \langle \pi(y), x\rangle = \langle y, \pi(x)\rangle,$$

waaruit volgt dat π inderdaad zelf-geadjungeerd is.

Als derde alternatief kunnen we ook de matrix gewoon opschrijven. Als $a = (a_1, a_2, a_3)$ een normaal van lengte 1 is voor V, dan zagen we al dat $\pi(x) = x - \langle a, x\rangle a$, dus vinden we $\pi(e_i) = e_i - a_i a$ voor de standaard basisvectoren e_1, e_2, e_3. De matrix die π beschrijft heeft de coefficiënten van deze beelden als kolommen, dus is gelijk aan

$$\begin{pmatrix} 1 - a_1^2 & -a_2a_1 & -a_3a_1 \\ -a_1a_2 & 1 - a_2^2 & -a_3a_2 \\ -a_1a_3 & -a_2a_3 & 1 - a_3^2 \end{pmatrix},$$

en is dus inderdaad symmetrisch.

Opgave 6. (7 punten) Gegeven zijn twee reële vectorruimtes V en W en een bilineaire vorm $\varphi\colon V \times W \to \mathbf{R}$. Zoals we hebben gezien in het dictaat en op college induceert φ twee lineaire afbeeldingen

$$\varphi_L\colon V \to W^* \qquad \text{en} \qquad \varphi_R\colon W \to V^*.$$

Op college en in het dictaat wordt ook de afbeelding $\alpha_V\colon V \to V^{**}$ gedefinieerd.

(a) Laat zien dat er geldt
$$\varphi_L = \varphi_R^\top \circ \alpha_V.$$

(b) Neem aan dat V eindig-dimensionaal is. Bewijs dat φ niet-gedegenereerd is dan en slechts dan als φ_L of φ_R een isomorfisme is.

Oplossing.

(a) De afbeelding $\varphi_R^\top$ gaat van V^{**} naar W^*, dus de samenstelling $\varphi_R^\top \circ \alpha_V$ is inderdaad goed gedefinieerd en gaat van V naar W^*, net als φ_L. [Opmerking: dat betekent nog niet, zoals velen dachten, dat de twee afbeeldingen gelijk zijn!]

Merk op dat de betreffende afbeelding worden gedefinieerd door

$$\begin{aligned}
\varphi_R : W \to V^*, &\qquad w \mapsto \varphi(_, w),\\
\varphi_L : V \to W^*, &\qquad v \mapsto \varphi(v, _),\\
\alpha_V : V \to V^{**}, &\qquad v \mapsto \mathrm{ev}_v.
\end{aligned}$$

Om te checken dat de afbeeldingen gelijk zijn, is het voldoende om te checken dat ze voor elke $v \in V$ hetzelfde beeld in W^* geven. Die beelden in W^* zijn weer afbeeldingen van W naar $\mathbf{R}$, dus om te checken dat die beelden gelijk zijn is het voldoende om te checken dat die twee beelden voor elke $w \in W$ hetzelfde beeld in $\mathbf{R}$ geven. Voor all $v \in V$ en $w \in W$ geldt [let op de haakjes!]

$$\begin{aligned}
\big((\varphi_R^\top \circ \alpha_V)(v)\big)(w) &= \big(\varphi_R^\top(\alpha_V(v))\big)(w) = \big(\varphi_R^\top(ev_v)\big)(w)\\
&= (\mathrm{ev}_v \circ \varphi_R)(w) = \mathrm{ev}_v(\varphi_R(w)) = \mathrm{ev}_v(\varphi(_, w)) = \varphi(v, w),
\end{aligned}$$

en

$$(\varphi_L(v))(w) = (\varphi(v, \_))(w) = \varphi(v, w).$$

Terugwerkend, omdat dit voor alle $w \in W$ geldt, zijn dus de afbeeldingen $(\varphi_R^\top \circ \alpha_V)(v)$ en $\varphi_L(v)$ van W naar $\mathbf{R}$ gelijk voor alle $v \in V$. En dat betekent weer dat de afbeeldingen $\varphi_R^\top \circ \alpha_V$ en φ_L gelijk zijn.

(b) Per definite is φ niet-gedegenereerd als φ_L en φ_R **beide** isomorfismen zijn. Het volstaat dus om te bewijzen dat als de ene van de twee een isomorfisme is, dan die andere ook. We doen beide gevallen. Merk op dat α_V een isomorfisme is omdat V eindig-dimensionaal is (Stelling 6.8).

Stel dat φ_R een isomorfisme is. Dan is $\varphi_R^\top$ dat ook (Stelling 6.12) en dus de samenstelling $\varphi_R^\top \circ \alpha_V = \varphi_L$ ook.

Stel dat φ_L een isomorfisme is. Dan is wegens (a) ook de samenstelling $\varphi_R^\top = \varphi_L \circ \alpha_V^{-1}$ een isomorfisme. Hieruit volgt dat ook φ_R een isomorfisme is. [Dit laatste mocht je zo gebruiken. Het volgt niet uit 6.12, maar bijvoorbeeld wel uit 6.13. Het volgt ook uit de combinatie van 6.12 en 6.15: als $\varphi_R^\top : V^{**} \to W^*$ een isomorfisme is, dan is $\varphi_R^{\top\top}$ dat ook en bovendien volgt dat ook W^*, en dus W, eindig-dimensionaal is. Dan is α_W ook een isomorfisme en volgt uit 6.15 dat $\varphi_R = \alpha_W^{-1} \circ \varphi_R^{\top\top} \circ \alpha_V$ ook een isomorfisme is.]

Hiermee is het gevraagde bewezen.

Opgave 7. (5 punten) Zij V een eindig-dimensionale reële vectorruimte en zij $f : V \to V$ een diagonaliseerbare lineaire afbeelding. Bewijs dat voor elke deelruimte $U \subset V$ die f-invariant is, de beperking $f|_U : U \to U$ ook diagonaliseerbaar is.
[Herinnering: de "beperking" heet ook wel de "restrictie", en een deelruimte U is f-invariant als voor elke $u \in U$ geldt $f(u) \in U$.]

Oplossing. Een lineaire afbeelding van een eindig-dimensionale vectorruimte naar zichzelf is diagonaliseerbaar dan en slechts dan las het minimum polynoom het product is van verschillende lineaire factoren (Propositie 3.8). Dat geldt dus voor het minimum polynoom M_f van f. Dit polynoom voldoet aan $M_f(f) = 0$, dus in het bijzonder is de beperking van $M_f(f)$ tot U gelijk aan de nulafbeelding. Die beperking is $M_f(f|_U)$, dus is M_f ook een polynoom waarvoor geldt dat als je de beperking $f|_U$ erin stopt, er de nulafbeelding (op U) uit komt. Dit betekent dat M_f deelbaar is door het minimum polynoom $M_{f|_U}$ van $f|_U$ (wegens Lemma 3.4). Daaruit volgt dat ook $M_{f|_U}$ het product is van verschillende lineaire factoren, dus ook $f|_U$ is diagonaliseerbaar.

Alternatieve oplossing. Door een basis B voor U uit te breiden tot een basis C voor V vinden we dat de matrix behorend bij f een blokmatrix

$$[f]_C^C = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right)$$

is waarbij $A_1 = [f|_U]_B^B$ de matrix is die hoort bij de beperking $f|_U$ ten opzichte van B. [Opmerking: velen dachten dat door een (orthogonale) complementaire ruimte U' te nemen, de blokmatrix een blokdiagonaalmatrix zou worden, dus met $A_2 = 0$ en A_3 de matrix behorend bij $f|_{U'}$, maar de ruimte U' hoeft niet f-invariant te zijn, dus dat kun je niet gebruiken.] Hieruit volgt dat het karakteristiek polynoom van $f|_U$ een deler is van het karakteristiek polynoom van f. Omdat f diagonaliseerbaar is, is het karakteristiek polynoom van f het product van lineaire factoren, dus het karakteristiek polynoom van de beperking $f|_U$ is dat ook. Dat betekent dat $f|_U$ een Jordannormaalvorm heeft.

Uit het feit dat f diagonaliseerbaar is, volgt bovendien dat voor elke eigenwaarde λ de bijbehorende eigenruimte $E_\lambda(f)$ gelijk is aan de gegeneraliseerde eigenruimte $E'_\lambda(f)$. Voor de beperking $f|_U$ geldt

$$E_\lambda(f|_U) = E_\lambda(f) \cap U = E'_\lambda(f) \cap U = E'_\lambda(f|_U),$$

dus ook voor alle eigenwaarden van de beperking $f|_U$ zijn de eigenruimtes van $f|_U$ gelijk aan de gegeneraliseerde eigenruimtes. Dit impliceert dat de Jordannormaalvorm van $f|_U$ diagonaal is, dus $f|_U$ is diagonaliseerbaar.

Tweede alternatieve oplossing. Omdat f diagonaliseerbaar is geldt er $V = \oplus_\lambda E_\lambda(f)$, waarbij λ loopt over de eigenwaarden van f. We claimen dat hieruit volgt dat er ook geldt $U = \oplus_(\lambda E_\lambda(f) \cap U)$. Omdat de eigenruimte voor eigenwaarde λ van de beperking $f|_U$ gelijk is aan $E_\lambda(f|_U) = E_\lambda(f) \cap U$, volgt uit de claim dat U de directe som is van eigenruimtes van $f|_U$, dus volgt dat $f|_U$ diagonaliseerbaar is. Om de claim te bewijzen is het voldoende om te laten zien dat als $u \in U$ te schrijven is als $u = \sum_\lambda v_\lambda$ met $v_\lambda \in E_\lambda(f)$, dat dan ook geldt $v_\lambda \in U$. Dit kan bijvoorbeeld door de samenstelling van de afbeeldingen $f - \mu \cdot \mathrm{id}$ toe te passen voor alle eigenwaarden μ behalve λ., want er geldt $(f - \mu \cdot \mathrm{id})(v_\mu) = 0$, dus

$$U \ni \left(\prod_{\mu \neq \lambda} (f - \mu \cdot \mathrm{id}) \right)(u) = \left(\prod_{\mu \neq \lambda} (\lambda - \mu) \right) \cdot v_\lambda,$$

en omdat de constante in de laatste uitdrukking ongelijk aan 0 is, volgt $v_\lambda \in U$.

Een variant van dit bewijs gebruikt dat $f^n(u) = \sum_\lambda \lambda^n v_\lambda$ bevat is in U voor alle niet-negatieve gehele getallen n. Nu kun je het inverteerbaar zijn van Vandermonde matrices gebruiken om te concluderen dat $v_\lambda \in U$.