Uitwerkingen tentamen Lineaire Algebra 2
15 januari, 2016

Opgave 2 (10 punten).

(a) Het karakteristiek polynoom van A is $\det(tI - A) = (t-1)^5$, dus er is maar één eigenwaarde, namelijk $\lambda = 1$. Er geldt $(A-I)^2 = 0$, dus $\dim \ker(A-I)^2 = 5$. Alle Jordanblokken hebben dus grootte hooguit 2. De matrix $A - I$ is al in row echelonvorm, en we vinden dat de kern van $A-I$ wordt voortgebracht door e_1, e_2 en e_3. Er geldt dus $\dim \ker(A-I) = 3$, dus er zijn drie Jordanblokken, alle van grootte hooguit 2. Er zijn $5 - 3 = 2$ blokken van grootte minstens 2, dus is er precies één blok van grootte 1 en twee blokken van grootte 2.

We kiezen (voor de twee blokken van groote 2) eerst twee vectoren in

$$\ker(A-I)^2 \setminus \ker(A-I) = \mathbb{R}^5 \setminus \langle e_1, e_2, e_3 \rangle,$$

bijvoorbeeld $w_1 = e_4$ en $w_2 = e_5$. Hun beelden onder $A - I$ zijn $(A-I)w_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$ en $(A-I)w_2 = (1, 0, 1, 0, 0)$. Deze twee vectoren zijn inderdaad bevat in $\ker(A-I)$, die dimensie 3 heeft, zoals we al zagen. We kiezen nu nog een derde lineair onafhankelijk element in $\ker(A-I)$, bijvoorbeeld $w_3 = e_1$. We zetten deze vectoren als kolommen in een matrix in de volgorde $(A-I)w_1, w_1, (A-I)w_2, w_2, w_3$, dus

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dan geldt

$$J = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Definieer $M = J - I$, zodat $J = I + M$. Dan geldt $M^2 = 0$ en

$$A = QJQ^{-1} = Q(I+M)Q^{-1} = QIQ^{-1} + QMQ^{-1} = D + N,$$

met $D = QIQ^{-1} = I$ en $N = QMQ^{-1}$. Dan geldt $N^2 = 0$ en

$$N = A - I = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en uiteraard geldt $DN = ND$.

(c) Omdat N en D met elkaar commuteren en er geldt $N^2 = 0$, volgt voor elke $n \geq 0$ volgens het binomium van Newton dat

$$A^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^n N^0 + nD^{n-1}N^1 = I + nN.$$

Voor elke $t \in \mathbb{R}$ volgt

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(I + nN) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} I\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^n}{n!} N\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\right) I + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}\right) N = e^t \cdot I + te^t \cdot N = \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & -2te^t & te^t \\ 0 & e^t & 0 & te^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 & te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Opgave 3 (8 punten).

(a) en (b) De eigenwaarden zijn de nulpunten van het minimum polynoom, dus 1, 2 en -3. Volgens Proposition 4.9 is $\mathbb{R}^{11}$ de directe som van de gegeneraliseerde eigenruimtes

$$\ker(A - I)^2, \qquad \ker(A - 2I) \qquad \text{en} \qquad \ker(A + 3I)^3.$$

De laatste twee hebben dimensies 3 respectievelijk 4. Omdat de som van de dimensies gelijk is aan 11 is de dimensie van $\ker(A - I)^2$ gelijk aan $11 - 3 - 4 = 4$. Dit geeft al dat het karakteristiek polynoom van B gelijk is aan

$$P_B(x) = (x - 1)^4 (x - 2)^3 (x + 3)^4,$$

want de exponent bij elke eigenwaarde (de algebraïsche multipliciteit) is gelijk aan de dimensie van de bijbehorende gegeneraliseerde eigenruimte.

De exponent van $x - \lambda$ in het minimum polynoom is de grootte van het grootste Jordanblok dat hoort bij die eigenwaarde, dus voor eigenwaarde $\lambda = -3$ is er een blok van grootte 3. De som van de groottes van de Jordanblokken voor eigenwaarde -3 is de dimensie van de gegeneraliseerde eigenruimte, dus 4 in totaal. Dat betekent dat naast het blok van grootte 3 er nog één blok van grootte 1 is.

Voor eigenwaarde $\lambda = 2$ is de exponent van $(x - 2)$ in het minimum polynoom gelijk aan 1, dus zijn er alleen blokken van grootte 1. De dimensie van de gegeneraliseerde eigenruimte is 3, dus er zijn drie blokken van grootte 1.

Voor eigenwaarde $\lambda = 1$ is de exponent van $(x - 1)$ in het minimum polynoom gelijk aan 2, dus er is een blok van grootte 2. De dimensie van de gegeneraliseerde eigenruimte is 4, dus de som van de groottes van de overige blokken is $4 - 2 = 2$. Dat is dus ofwel nog een blok van grootte 2 of twee blokken van grootte 1.

Op volgorde van de blokken na zijn de mogelijke Jordannormaalvormen dus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

en

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4 (11 punten).

(a) Schrijven we M_j voor de $j \times j$ deelmatrix van M in de linkerbovenhoek, dan geldt $\det M_1 = 1 > 0$ en $\det M_2 = 1 > 0$ en $\det M_3 = 1 > 0$, dus φ is positief definiet volgens Theorem 8.28.

(b) We beginnen met de basis e_2, e_3, e_1 waarvan de eerste twee vectoren het vlak V opspannen. Met Gram-Schmidt krijgen we orthogonale vectoren

$$\begin{aligned} w_1 &= e_2 = (0,1,0), \\ w_2 &= e_3 - \frac{\varphi(e_3, w_1)}{\varphi(w_1, w_1)} w_1 = e_3 - \tfrac{1}{2} e_2 = (0, -\tfrac{1}{2}, 1), \\ w_3 &= e_1 - \frac{\varphi(e_1, w_1)}{\varphi(w_1, w_1)} w_1 - \frac{\varphi(e_1, w_2)}{\varphi(w_2, w_2)} w_2 = e_1 - \tfrac{1}{2} e_2 - \tfrac{1/2}{3/2}(e_3 - \tfrac{1}{2} e_2) = \\ &= e_1 - \tfrac{1}{3} e_2 - \tfrac{1}{3} e_3 = (1, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}). \end{aligned}$$

Na normaliseren krijgen we $v_i = \frac{1}{\sqrt{\varphi(w_i, w_i)}} \cdot w_i$, dus

$$\begin{aligned} v_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0), \\ v_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{6}}(0,-1,2), \\ v_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(3,-1,-1). \end{aligned}$$

De eerste twee geven een orthonormale basis (v_1, v_2) voor V. Alledrie samen geven een orthonormale basis (v_1, v_2, v_3) voor $\mathbb{R}^3$.

[Veel mensen deelden door de standaard Euclidische lengte van de vectoren om te normaliseren, in plaats van door de lengte die hoort bij φ, dus $\|x\|_M = \sqrt{\langle x, x\rangle_M}$.]

(c) De derde vector v_3 staat loodrecht op V, dus we mogen elk veelvoud van v_3 nemen, zeg $a = (3, -1, -1)$.

(d) Er geldt $\langle f(x), y\rangle_M = \langle x, f^*(y)\rangle_M$, dus als f zelfgeadjungeerd was, dan zou voor alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gelden $\langle f(x), y\rangle_M = \langle x, f(y)\rangle_M$. Maar voor $x = e_1$ en $y = e_2$ geldt

$$\langle f(x), y\rangle_M = \langle -e_1, e_2\rangle_M = -1 \qquad \text{en} \qquad \langle x, f(y)\rangle_M = \langle e_1, e_2\rangle_M = 1 \neq -1,$$

tegenspraak. Dus is f niet zelfgeadjungeerd.

[Het volgt ook uit onderdeel (e), waarin we zullen zien dat f niet eens normaal is. Als f wel zelfgeadjungeerd was geweest, dan zou f ook normaal geweest zijn.]

(e) De vectoren e_1 en e_2 zijn eigenvectoren van f met verschillende eigenwaarden, namelijk -1 en 1. Omdat e_1 en e_2 in deze inproductruimte niet loodrecht staan op elkaar (want $\langle e_1, e_2\rangle_M = 1 \neq 0$), is f wegens Lemma 10.2(c) niet normaal.

Je kunt ook de hele matrix voor f bepalen ten opzichte van de orthonormale basis $B = (v_1, v_2, v_3)$. Voor $A = [f]_B^B$ geldt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Het is eenvoudig te checken dat AA^* en A^*A niet gelijk zijn, dus f is niet normaal wegens Corollary 9.20.

Opgave 5 (7 punten). Het karakteristiek polynoom van A is $x^2 - 9x + 14 = (x-2)(x-7)$, dus de eigenwaarden zijn 2 en 7. De bijbehorende eigenruimtes worden opgespannen door $(1, -2)$, respectievelijk $(2, 1)$. Om deze vectoren te schalen tot lengte 1 delen we ze door $\sqrt{5}$. Als kolommen in een matrix vinden we

$$Q = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hiervoor geldt inderdaad dat Q orthogonaal is. Dit kun je direct checken door te verifiëren dat $QQ^\top = I$, maar het volgt ook uit het feit dat eigenvectoren van een symmetrische reële matrix die horen bij verschillende eigenwaarden loodrecht op elkaar staan.

$$D = Q^\top A Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Opgave 6 (9 punten).

(a) Stel $v \in U$. Voor elke $u \in U$ geldt $\varphi(u, u) = 0$ en $\varphi(v, v) = 0$ en bovendien

$$0 = \varphi(u+v, u+v) = \varphi(u, u) + 2\varphi(u, v) + \varphi(v, v) = 0 + 2\varphi(u, v) + 0 = 2\varphi(u, v),$$

dus $\varphi(u, v) = 0$. Dit geldt voor alle $u \in U$, dus geldt $v \in U^\perp$. We concluderen $U \subset U^\perp$.

(b) Bijvoorbeeld $V = \mathbb{R}^2$ met bilineaire vorm φ gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en U opgespannen door $e_1 = (1, 0)$. Voor elke $v = (a, b) \in V$ geldt $\varphi(e_1, v) = b$, dus v is bevat in $U^\perp$ dan en slechts dan als $b = 0$, dus als v een veelvoud is van e_1, dus als $v \in U$. Dus geldt inderdaad $U = U^\perp$.

(c) Kies een basis $(v_1, \ldots, v_r)$ voor U en breid die uit tot een basis $B = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ voor V. Voor elke $f \in U^*$ construeren we nu een afbeelding $g \in V^*$ door te definiëren

$$g(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = f(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i).$$

Dan is de beperking van g tot U gelijk aan f, dus $\iota^\top(g) = f$. We concluderen dat $\iota^\top$ surjectief is.

(d) De symmetrische bilineaire vorm φ is niet-gedegenereerd, dus de geïnduceerde afbeelding $\varphi_L \colon V \to V^*$ die v stuurt naar $\varphi(v, \_)$ is een isomorfisme. De samenstelling

$$\iota^\top \circ \varphi_L \colon V \to U^*$$

is dus ook surjectief. De kern van deze samenstelling is precies $U^\perp$, dus uit de dimensiestelling voor afbeeldingen volgt

$$\dim V = \dim \operatorname{im}(\iota^\top \circ \varphi_L) + \dim \ker(\iota^\top \circ \varphi_L) = \dim U^* + \dim U^\perp = \dim U + \dim U^\perp.$$