Hertentamen Lineaire Algebra 2

16 april, 2015
14:00-17:00

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs al je antwoorden. In totaal kun je 50 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Opgave 0 (5 punten). Schrijf duidelijk je naam, je emailadres, je universiteit (Delft of Leiden), je studentnummer bij je eigen universiteit en je studentnummer in Leiden op.

Opgave 1 (10 punten). Beschouw de reële matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de Jordannormaalvorm van A, en een bijbehorende basistransformatie. Met andere woorden, geef een matrix J in Jordannormaalvorm en een inverteerbare matrix Q zodanig dat $J = Q^{-1}AQ$.

(b) Vind een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodanig dat

$$B = D + N \qquad \text{en} \qquad ND = DN.$$

(c) Bepaal B^{1000}.

Opgave 2 (9 punten). Zij M een reële 17×17 matrix van rang 10 waarvoor geldt $M^2 = M$.

(a) Bepaal het minimum polynoom van M.

(b) Bepaal de eigenwaarden van M.

(c) Bepaal de Jordannormaalvorm van M.

(d) Bepaal het karakteristiek polynoom van M.

Op de achterkant van dit vel staan nog drie opgaven.

Opgave 3 (9 punten). Beschouw de kwadratische vorm $q(x,y) = 2x^2 + 6xy - 6y^2$.

(a) Bepaal een symmetrische matrix A zodanig dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$q(x,y) = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonaalmatrix D zodanig dat

$$D = Q^\top AQ.$$

(Bewijs ook dat Q orthogonaal is.)

(c) Bepaal twee reële getallen $a, b \in \mathbb{R}$ en een orthogonale afbeelding $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zodanig dat

$$q\big(f(u,v)\big) = au^2 + bv^2$$

voor alle $u, v \in \mathbb{R}$.

(d) Welke waarden neemt $q(x,y)$ aan op de eenheidscirkel gegeven door $x^2 + y^2 = 1$? (Leg uit!)

Opgave 4 (10 punten). Geef voor elk van de volgende beschrijvingen een voorbeeld (met bewijs) van een reële inproductruimte V en een normale lineaire afbeelding $g\colon V \to V$, of bewijs dat zo'n afbeelding niet bestaat.

(a) De afbeelding g is wel een isomorfisme maar niet een isometrie.
(b) De afbeelding g is niet zelf-geadjungeerd is.
(c) De afbeelding g is niet orthodiagonaliseerbaar.

Opgave 5 (7 punten). Laat V een eindigdimensionale vectorruimte zijn over $\mathbb{R}$, en laat $b\colon V \times V^* \to \mathbb{R}$ een bilineaire afbeelding zijn die niet gedegenereerd is. Laat zien dat er een isomorfsme $f\colon V \to V$ is zodat $b(v,\varphi) = \varphi(f(v))$ voor alle $v \in V$ en $\varphi \in V^*$.