# Tentamen Lineaire Algebra 2

**16 januari, 2015**

**10:00-13:00**

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs al je antwoorden. In totaal kun je 50 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

**Opgave 0** (5 punten). Schrijf duidelijk je naam, je emailadres, je universiteit (Delft of Leiden), je studentnummer bij je eigen universiteit en je studentnummer in Leiden op.

**Opgave 1** (10 punten). Beschouw de reële matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de Jordannormaalvorm van $A$, en een bijbehorende basistransformatie. Met andere woorden, geef een matrix $J$ in Jordannormaalvorm en een inverteerbare matrix $Q$ zodanig dat $J = Q^{-1}AQ$.

(b) Vind een diagonaliseerbare matrix $D$ en een nilpotente matrix $N$ zodanig dat

$$B = D + N \qquad \text{en} \qquad ND = DN.$$

(c) Bepaal $B^{1000}$.

**Opgave 2** (9 punten). Zij $A$ een reële $17 \times 17$ matrix en $I$ de $17 \times 17$ identiteitsmatrix. Voor enkele waarden van $\lambda$ en $k$ is de rang van $(A - \lambda I)^k$ gegeven in de volgende tabellen.

| $M$ | rk($M$) |
|---|---|
| $A - 3I$ | 14 |
| $(A - 3I)^2$ | 12 |
| $(A - 3I)^3$ | 10 |
| $(A - 3I)^4$ | 10 |

| $M$ | rk($M$) |
|---|---|
| $A - 2I$ | 14 |
| $(A - 2I)^2$ | 11 |
| $(A - 2I)^3$ | 11 |
| $A - I$ | 13 |

(a) Bepaal de Jordannormaalvorm van $A$.

(b) Bepaal het karakteristiek polynoom van $A$.

(c) Bepaal het minimum polynoom van $A$.

**Op de achterkant van dit vel staan nog drie opgaven.**

**Opgave 3** (9 punten). Beschouw de kwadratische vorm $q(x, y) = 5x^2 - 12xy - 4y^2$.

(a) Bepaal een symmetrische matrix $A$ zodanig dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$q(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal een orthogonale matrix $Q$ en een diagonaalmatrix $D$ zodanig dat

$$D = Q^\top AQ.$$

(c) Bepaal twee reële getallen $a, b \in \mathbb{R}$ en een orthogonale afbeelding $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zodanig dat

$$q\big(f(u, v)\big) = au^2 + bv^2$$

voor alle $u, v \in \mathbb{R}$.

(d) Welke waarden neemt $q(x, y)$ aan op de eenheidscirkel gegeven door $x^2 + y^2 = 1$?

**Opgave 4** (10 punten). Zij $V$ de vectorruimte van reële polynomen van graad hooguit 2. Definieer de afbeelding

$$\begin{aligned} \varphi\colon V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_0^1 f(x)g(x)\,dx. \end{aligned}$$

(a) Laat zien dat $\varphi$ een inproduct is.

(b) Geef een orthogonale basis voor de inproductruimte $V$ met dit inproduct.

(c) Zij $T\colon V \to V$ de afbeelding gedefinieerd door $T(f) = f'$ waarbij $f'$ de afgeleide is van $f$. Is $T$ normaal?

**Opgave 5** (7 punten). Zij $V$ een eindig-dimensionale reële inproductruimte. Zij $f\colon V \to V$ een lineaire afbeelding die voldoet aan

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$

voor alle $v, w \in V$.

(a) Bewijs dat $f$ een isomorfisme en dus een isometrie is.

(b) Bewijs dat voor de geadjungeerde (Engels: *adjoint*) $f^*$ van $f$ geldt:

$$f^* = f^{-1}.$$

[Volgens Propositie 9.15 uit het dictaat volgt dit direct uit het feit dat $f$ een isometrie is. Dat mag je hier niet gebruiken, maar kun je wel zelf opnieuw bewijzen.]