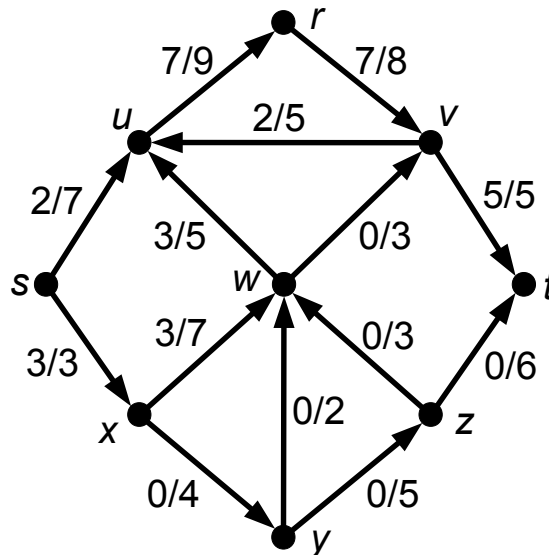

Tentamen Optimalisering (TW2020)

Vrijdag 8 januari 2016

Het tentamen bestaat uit 6 opgaven verspreid over 3 pagina's. In totaal zijn er tussen de -10 en 80 punten te verdienen. Je cijfer wordt verkregen door het totaal aantal behaalde punten door 8 te delen en, indien het resultaat kleiner is dan 1, dit naar 1 op te hogen. Je mag bij dit tentamen alleen schrijfgerei en een niet-grafische rekenmachine gebruiken. Aantekeningen, boeken, grafische rekenmachines, computers, telefoons e.d. mogen **niet** gebruikt worden. Succes!

Opgave 1 (10 punten). Beschouw de onderstaande gerichte graaf $D = (V, A)$ waarin elke pijl $(i, j) \in A$ een label f_{ij}/b_{ij} heeft. Hier is f_{ij} de huidige stroom over pijl (i, j) en b_{ij} de maximum capaciteit van de pijl (i, j) .



- (a) Laat zien dat deze s - t stroom niet maximaal is, door een grotere s - t stroom te geven. Gebruik hiervoor een iteratie van het Ford-Fulkerson algoritme. (5 punten)
- (b) Is de grotere s - t stroom die je bij (a) gevonden hebt wel maximaal? Beargumenteer je antwoord. (5 punten)

Opgave 2 (10 punten). Laat $G = (V, E)$ een graaf zijn met lengtefunctie $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ op de lijnen. Bewijs dat als $U \subset V$ en $e \in \delta(U)$ zodanig dat

$$\ell(e) < \ell(f) \quad \forall f \in \delta(U) \text{ met } f \neq e$$

dan bevat elke minimum opspannende boom voor G de lijn e . (Hier is $\delta(U)$ de verzameling lijnen waarvan één eindpunt in U en één eindpunt niet in U zit.)

Opgave 3 (20 punten). Los het volgende ILP probleem op met de Branch & Bound methode. Los hierbij de LP-relaxatie van het gehele probleem op met de Simplex methode en los LP-relaxaties van deelproblemen op met de **duale** Simplex methode. Geef duidelijk aan waarom takken gesnoeid kunnen worden.

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{o.d.v.} & 8x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Opgave 4 (10 punten). Beschouw de onderstaande mini-sudoku puzzel. Het doel is om in elk leeg vakje een cijfer uit $\{1, 2, 3, 4\}$ in te vullen zodanig dat in elke rij, in elke kolom, en in elk van de vier 2×2 blokken elk van de vier getallen precies één keer voorkomt.

4		2	
			4
1			2
2	3		

Formuleer dit probleem als een ILP probleem.

Opgave 5 (10 punten). Gegeven is Farkas' lemma:

Stelling 1. Voor elke $m \times n$ matrix A en vector $b \in \mathbb{R}^m$ is precies één van de volgende twee beweringen waar:

- (i) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$
- (ii) $\{\pi \in \mathbb{R}^m \mid \pi^T A \geq 0, \pi^T b < 0\} \neq \emptyset$.

Gebruik Farkas' lemma om te bewijzen dat voor elke $m \times n$ matrix A en vector $b \in \mathbb{R}^m$ precies één van de volgende twee beweringen waar is:

- (1) $\exists x \in \mathbb{R}^n$ zodanig dat $Ax \leq b$ en $x \geq 0$;
- (2) $\exists \pi \in \mathbb{R}^m$ zodanig dat $\pi^T A \geq 0$, $\pi^T b < 0$ en $\pi \geq 0$.

Je mag hier de sterke dualiteitsstelling niet bij gebruiken.

Opgave 6 (20 punten). Geef van elk van de onderstaande beweringen aan of ze TRUE (waar) of FALSE (niet waar) zijn. Voor elk correct antwoord krijg je 2 punten, voor elk fout antwoord -1 punt. Elke niet-beantwoorde vraag levert 0 punten op. Je hoeft je antwoorden niet te motiveren.

- (a) Als een LP probleem niet-toegelaten is dan is het duale probleem onbegrensd.
- (b) Als een toegelaten basisoplossing x gedegenereerd is, dan zijn er meerdere basissen met basisoplossing x .
- (c) De Simplex methode is een polynomiaal algoritme als Bland's anti-cycling regels worden gebruikt.
- (d) Als beslissingsprobleem Π_1 NP-moeilijk is en er bestaat een reductie van Π_1 naar een ander beslissingsprobleem Π_2 , dan is Π_2 ook NP-moeilijk.
- (e) Als beslissingsprobleem Π_1 oplosbaar is in polynomiale tijd is en er bestaat een reductie van Π_1 naar een ander beslissingsprobleem Π_2 , dan is Π_2 ook oplosbaar in polynomiale tijd.
- (f) Een algoritme met looptijd $O(W(|V| + |E|))$ voor een probleem met als invoer een gewogen graaf $G = (V, E)$ met maximum gewicht W heeft polynomiale looptijd.

(g) Het onderstaande probleem 3-KLEURING zit in de klasse NP.

3-KLEURING

- **Gegeven:** graaf $G = (V, E)$.

- **Beslis:** kun je aan elk punt $v \in V$ een kleur uit $\{\text{rood, blauw, groen}\}$ toewijzen zodanig dat voor geen enkele lijn $e \in E$ de twee eindpunten dezelfde kleur krijgen?

(h) Als er een approximatiealgoritme bestaat met prestatiegarantie $\rho = 1$ voor een NP-volledig probleem dan is $P = NP$.

(i) Er bestaat een 2-approximatiealgoritme voor het handelsreizigersprobleem (TSP) wanneer de afstanden voldoen aan de driehoeksongelijkheid.

(j) De onderstaande matrix A is totaal unimodulair.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$