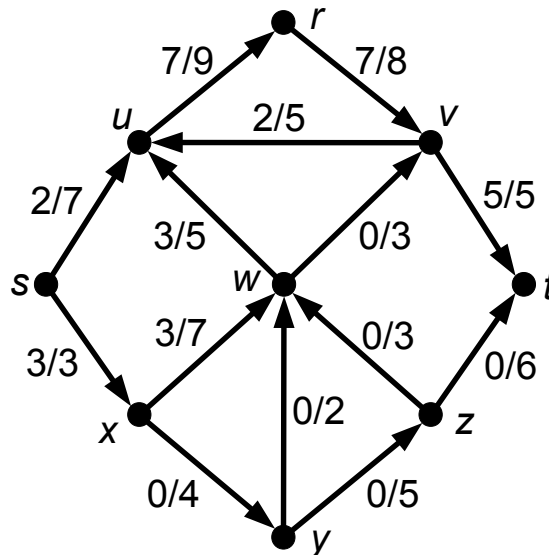

Uitwerking Tentamen Optimalisering (TW2020)

Vrijdag 8 januari 2016

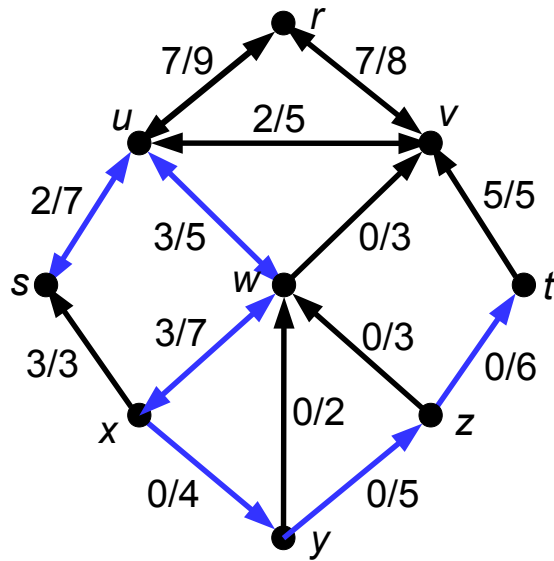
Het tentamen bestaat uit 6 opgaven verspreid over 3 pagina's. In totaal zijn er tussen de -10 en 80 punten te verdienen. Je cijfer wordt verkregen door het totaal aantal behaalde punten door 8 te delen en, indien het resultaat kleiner is dan 1, dit naar 1 op te hogen. Je mag bij dit tentamen alleen schrijfgerei en een niet-grafische rekenmachine gebruiken. Aantekeningen, boeken, grafische rekenmachines, computers, telefoons e.d. mogen **niet** gebruikt worden. Succes!

Opgave 1 (10 punten). Beschouw de onderstaande gerichte graaf $D = (V, A)$ waarin elke pijl $(i, j) \in A$ een label f_{ij}/b_{ij} heeft. Hier is f_{ij} de huidige stroom over pijl (i, j) en b_{ij} de maximum capaciteit van de pijl (i, j) .

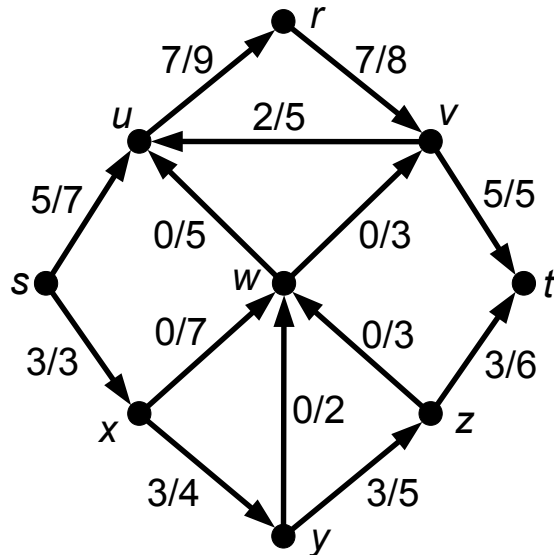


- (a) Laat zien dat deze s - t stroom niet maximaal is, door een grotere s - t stroom te geven. Gebruik hiervoor een iteratie van het Ford-Fulkerson algoritme. (5 punten)

Teken eerst de gerichte hulpgraaf.

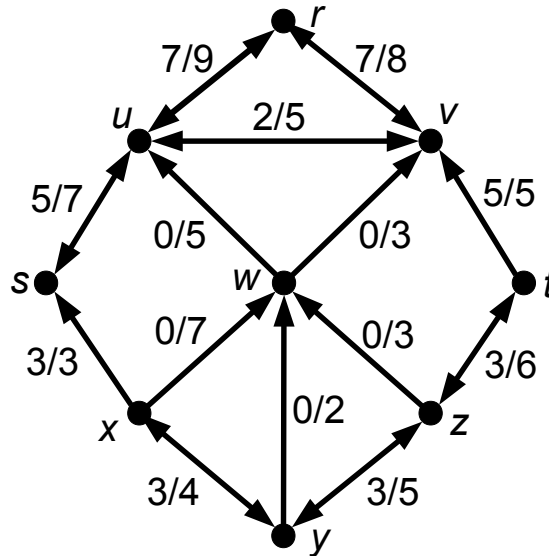


Zoek een gericht s - t -pad in de gerichte hulpgraaf. Het enige pad is s, u, w, x, y, z, t . Over dit pad kan de stroom met 3 vermeerderd worden. Dit geeft de volgende grotere stroom:



- (b) Is de grotere s - t stroom die je bij (a) gevonden hebt wel maximaal? Beargumenteer je antwoord. (5 punten)

Teken de nieuwe gerichte hulpgraaf.



Manier 1: merk op dat er in de nieuwe gerichte hulpgraaf geen gericht s - t pad is. Dus kan de stroom niet verder vermeerderd worden. Dus is de huidige stroom maximaal.

Manier 2: de punten die wel uit s bereikbaar zijn in de hulpgraaf zijn $U = \{s, u, v, r\}$. De pijlen die U uit gaan (in de originele graaf) zijn $(v, t), (s, x)$. Dit is een snede met capaciteit 5. Dus is er geen stroom groter dan 5. Dus is de huidige stroom optimaal.

Opgave 2 (10 punten). Laat $G = (V, E)$ een graaf zijn met lengtefunctie $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ op de lijnen. Bewijs dat als $U \subset V$ en $e \in \delta(U)$ zodanig dat

$$\ell(e) < \ell(f) \quad \forall f \in \delta(U) \text{ met } f \neq e$$

dan bevat elke minimum opspannende boom voor G de lijn e . (Hier is $\delta(U)$ de verzameling lijnen waarvan één eindpunt in U en één eindpunt niet in U zit.)

Stel er bestaat een minimum opspannende boom T die lijn e niet bevat. Lijn e aan T toevoegen creëert een uniek circuit C . Dit circuit moet nog tenminste één lijn uit $\delta(U)$ bevatten (het is een circuit dus als het U uit gaat dan moet het U ook ergens weer binnen komen). Laat e' een lijn van C zijn die in $\delta(U)$ zit. Lijn e' uit T weglaten en lijn e aan T toevoegen geeft een nieuwe opspannende boom T' . Er geldt $\ell(e) < \ell(e')$ want $e' \in \delta(U)$. Dus heeft T' kleinere totale lengte dan T . Dit is in tegenspraak met de aanname dat T een minimum opspannende boom is.

Opgave 3 (20 punten). Los het volgende ILP probleem op met de Branch & Bound methode. Los hierbij de LP-relaxatie van het gehele probleem op met de Simplex methode en los LP-relaxaties van deelproblemen op met de **duale** Simplex methode. Geef duidelijk aan waarom takken gesnoeid kunnen worden.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{o.d.v.} \quad & 8x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Los eerst de LP-relaxatie op met de Simplex methode:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2
s_1	20	8	3	1	0
s_2	3	0	<u>1</u>	0	1
$-z$	0	1	1	0	0

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2
s_1	11	<u>8</u>	0	1	-3
x_2	3	0	1	0	1
$-z$	-3	1	0	0	-1

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2
x_1	1 $\frac{3}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$
x_2	3	0	1	0	1
$-z$	-4 $\frac{3}{8}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$

Dus $z_{LP} = 4\frac{3}{8}$ voor $x_1 = 1\frac{3}{8}$ en $x_2 = 3$.

Splits op in twee deelproblemen: $x_1 \leq 1$ en $x_1 \geq 2$.

Los het deelprobleem voor $x_1 \leq 1$ op met de duale Simplex methode:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
x_1	1 $\frac{3}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	0
x_2	3	0	1	0	1	0
s_3	1	1	0	0	0	1
$-z$	-4 $\frac{3}{8}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	0

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
x_1	1 $\frac{3}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	0
x_2	3	0	1	0	1	0
s_3	$-\frac{3}{8}$	0	0	<u>$-\frac{1}{8}$</u>	$\frac{3}{8}$	1
$-z$	-4 $\frac{3}{8}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	0

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
x_1	1	1	0	0	0	1
x_2	3	0	1	0	1	0
s_1	3	0	0	1	-3	-8
$-z$	-4	0	0	0	-1	-1

De tak $x_1 \leq 1$ kan gesnoeid worden omdat er een geheeltallige oplossing voor dit deelprobleem gevonden is.

De bovengrens voor het gehele probleem is $4\frac{3}{8}$, en dit kan naar 4 afgerond worden omdat alle doelstellingscoëfficiënten geheeltallig zijn. Er is al een geheeltallige oplossing met waarde 4 gevonden, dus kan de tak $x_1 \geq 2$ nu ook gesnoeid worden. Alle takken zijn nu gesnoeid.

Een optimale oplossing is dus $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ met waarde 4.

Opgave 4 (10 punten). *Beschouw de onderstaande mini-sudoku puzzel. Het doel is om in elk leeg vakje een cijfer uit $\{1, 2, 3, 4\}$ in te vullen zodanig dat in elke rij, in elke kolom, en in elk van de vier 2×2 blokken elk van de vier getallen precies één keer voorkomt.*

4		2	
			4
1			2
2	3		

Formuleer dit probleem als een ILP probleem.

Beslissingsvariabelen: $x_{ijk} = 1$ als in de i -de rij en de j -de kolom getal k komt, en anders is $x_{ijk} = 0$.
De ILP formulering wordt dan:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 0 \\
 \text{o.d.v.} \quad & \sum_{i=1}^4 x_{ijk} = 1 \quad \forall j, k \in \{1, \dots, 4\} \\
 & \sum_{j=1}^4 x_{ijk} = 1 \quad \forall i, k \in \{1, \dots, 4\} \\
 & \sum_{k=1}^4 x_{ijk} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 4\} \\
 & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_{ijk} = 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, 4\} \\
 & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=3}^4 x_{ijk} = 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, 4\} \\
 & \sum_{i=3}^4 \sum_{j=1}^2 x_{ijk} = 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, 4\} \\
 & \sum_{i=4}^4 \sum_{j=3}^4 x_{ijk} = 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, 4\} \\
 & x_{1,1,4} = 1 \\
 & x_{1,3,2} = 1 \\
 & x_{2,4,4} = 1 \\
 & x_{3,1,1} = 1 \\
 & x_{3,4,2} = 1 \\
 & x_{4,1,2} = 1 \\
 & x_{4,2,3} = 1 \\
 & x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, 4\}
 \end{aligned}$$

Opgave 5 (10 punten). Gegeven is Farkas' lemma:

Stelling 1. Voor elke $m \times n$ matrix A en vector $b \in \mathbb{R}^m$ is precies één van de volgende twee beweringen waar:

- (i) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$
- (ii) $\{\pi \in \mathbb{R}^m \mid \pi^T A \geq 0, \pi^T b < 0\} \neq \emptyset$.

Gebruik Farkas' lemma om te bewijzen dat voor elke $m \times n$ matrix A en vector $b \in \mathbb{R}^m$ precies één van de volgende twee beweringen waar is:

- (1) $\exists x \in \mathbb{R}^n$ zodanig dat $Ax \leq b$ en $x \geq 0$;
- (2) $\exists \pi \in \mathbb{R}^m$ zodanig dat $\pi^T A \geq 0$, $\pi^T b < 0$ en $\pi \geq 0$.

Je mag hier de sterke dualiteitsstelling niet bij gebruiken.

Merk op dat het verschil tussen de bewering en Farkas' lemma is dat er $\leq$ -restricties zijn i.p.v. $=$ -restricties. Voeg dus slackvariabelen toe en pas Farkas' lemma toe. Oftewel, pas Farkas' lemma toe op matrix $A' = [A \quad I]$ en vectoren $x' = \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}$ en $b' = b$. Dan zegt Farkas' lemma dat precies één van de volgende twee beweringen waar is.

- (i) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid [A \quad I] \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = b, x \geq 0, s \geq 0\} \neq \emptyset$

(ii) $\{\pi \in \mathbb{R}^m \mid \pi^T [A \quad I] \geq 0, \pi^T b < 0\} \neq \emptyset$.

Omschrijven geeft:

(i) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax + Is = b, x \geq 0, s \geq 0\} \neq \emptyset$

(ii) $\{\pi \in \mathbb{R}^m \mid \pi^T A \geq 0, \pi \geq 0, \pi^T b < 0\} \neq \emptyset$.

En nog wat omschrijven:

(i) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset$

(ii) $\{\pi \in \mathbb{R}^m \mid \pi^T A \geq 0, \pi^T b < 0, \pi \geq 0\} \neq \emptyset$.

Wat duidelijk equivalent is aan wat er te bewijzen was.

Opgave 6 (20 punten). Geef van elk van de onderstaande beweringen aan of ze *TRUE* (waar) of *FALSE* (niet waar) zijn. Voor elk correct antwoord krijg je 2 punten, voor elk fout antwoord -1 punt. Elke niet-beantwoorde vraag levert 0 punten op. Je hoeft je antwoorden niet te motiveren.

(a) Als een LP probleem niet-toegelaten is dan is het duale probleem onbegrensd.

FALSE. Het duale probleem kan ook niet-toegelaten zijn.

(b) Als een toegelaten basisoplossing x gedegenereerd is, dan zijn er meerdere basissen met basisoplossing x .

FALSE. Zie huiswerkopgave 2.1. De omgekeerde bewering is wel waar.

(c) De Simplex methode is een polynomiaal algoritme als Bland's anti-cycling regels worden gebruikt.

FALSE. Het is dan eindig maar niet polynomiaal. Zie college 7.

(d) Als beslissingsprobleem Π_1 NP-moeilijk is en er bestaat een reductie van Π_1 naar een ander beslissingsprobleem Π_2 , dan is Π_2 ook NP-moeilijk.

TRUE

(e) Als beslissingsprobleem Π_1 oplosbaar is in polynomiale tijd is en er bestaat een reductie van Π_1 naar een ander beslissingsprobleem Π_2 , dan is Π_2 ook oplosbaar in polynomiale tijd.

FALSE. Om te bewijzen dat Π_2 oplosbaar is in polynomiale tijd zou je een reductie van Π_2 naar Π_1 moeten geven.

(f) Een algoritme met looptijd $O(W(|V| + |E|))$ voor een probleem met als invoer een gewogen graaf $G = (V, E)$ met maximum gewicht W heeft polynomiale looptijd.

FALSE. De invoergrootte is een functie van $|V|$, $|E|$ en $\log(W)$ en W is exponentiëel veel groter dan $\log(W)$.

(g) Het onderstaande probleem 3-KLEURING zit in de klasse NP.

3-KLEURING

- **Gegeven:** graaf $G = (V, E)$.
- **Beslis:** kun je aan elk punt $v \in V$ een kleur uit {rood, blauw, groen} toewijzen zodanig dat voor geen enkele lijn $e \in E$ de twee eindpunten dezelfde kleur krijgen?

TRUE. Een kleuring kan dienen als certificaat. Gegeven een kleuring kun je in polynomiale tijd controleren of van elke lijn de twee eindpunten verschillende kleuren hebben.

(h) Als er een approximatiealgoritme bestaat met prestatiegarantie $\rho = 1$ voor een NP-volledig probleem dan is $P = NP$.

TRUE

- (i) *Er bestaat een 2-approximatiealgoritme voor het handelsreizigersprobleem (TSP) wanneer de afstanden voldoen aan de driehoeksongelijkheid.*

TRUE

- (j) *De onderstaande matrix A is totaal unimodulair.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRUE. Het is de incidentiematrix van een volledige bipartiete graaf.