
Deeltentamen Optimalisering (TW2020)

Maandag 2 november 2015, 11.00 - 13.00

Het deeltentamen bestaat uit 6 opgaven verspreid over 3 pagina's. In totaal zijn er 45 punten te verdienen. Je cijfer wordt verkregen door bij het totaal aantal behaalde punten 5 op te tellen en vervolgens door 5 te delen. Je mag bij dit tentamen alleen schrijfgerei gebruiken. Aantekeningen, boeken, dictaten, (grafische) rekenmachines, computers, telefoons e.d. mogen **niet** gebruikt worden. Succes!

Opgave 1 (5 punten). *Formuleer de duale van het onderstaande LP probleem. Dit kan zonder motivatie.*

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 \\ \text{o.d.v.} & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_2 - 2x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Opgave 2 (5 punten). *Gegeven is het volgende Simplex tableau voor een minimaliseringsprobleem.*

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	5	1	1	-2	0	0	0	0
x_7	2	0	1	0	0	-1	0	1
x_4	1	0	0	-3	1	0	1	0
$-z$	1	0	3	d	0	1	2	0

Geef aan wanneer het bijbehorende (primale) probleem onbegrensd is, geen toegelaten oplossing heeft, één optimale oplossing heeft, of meerdere optimale oplossingen heeft, afhankelijk van de waarde van d . Dit kan zonder motivatie.

Opgave 3 (5 punten). *Een studente heeft nog 26 studiepunten nodig en wil vakken kiezen om deze studiepunten mee te halen. Er zijn 8 vakken die haar interessant lijken en die respectievelijk $p_1, \dots, p_8$ studiepunten waard zijn, en haar inschatting is dat ze voor deze vakken respectievelijk $u_1, \dots, u_8$ uren studietijd nodig heeft. Stel dat deze studente met zo min mogelijk studieuren haar studiepunten wil binnenhalen. Formuleer dit probleem als een ILP probleem.*

Opgave 4 (10 punten). Gegeven is Farkas' lemma:

Stelling 1. Voor elke $m \times n$ matrix A en vectoren $b \in \mathbb{R}^m$ en $c \in \mathbb{R}^n$ is precies één van de volgende twee beweringen waar:

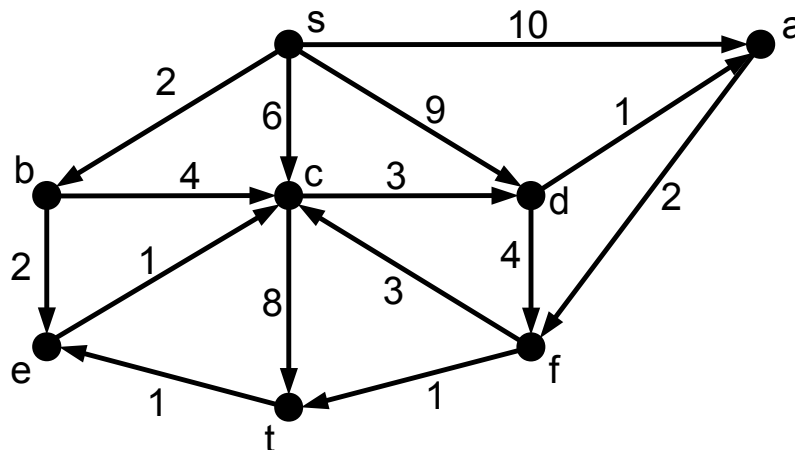
- $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$
- $\{\pi \in \mathbb{R}^m \mid \pi^T A \geq 0, \pi^T b < 0\} \neq \emptyset$

Gebruik Farkas' lemma om te bewijzen dat voor een $m \times n$ matrix A , een $m \times k$ matrix B en een vector $b \in \mathbb{R}^m$ precies één van de volgende twee beweringen waar is:

- $\exists x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k$ zodanig dat $Ax + By = b$ en $x \geq 0$;
- $\exists \pi \in \mathbb{R}^m$ zodanig dat $\pi^T A \geq 0$, $\pi^T B = 0$ en $\pi^T b < 0$.

Je mag hier de sterke dualiteitsstelling niet bij gebruiken.

Opgave 5 (10 punten). Beschouw de onderstaande gerichte graaf $D = (V, A)$ met de aangegeven lengtefunctie $\ell : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. Vind een kortste pad van s naar t in D met betrekking tot de lengtefunctie ℓ . Gebruik hiervoor het algoritme van Dijkstra en geef elke stap van het algoritme duidelijk aan. Geef ook het gevonden kortste s - t pad.



Opgave 6 (10 punten). Beschouw het volgende probleem. Gegeven is een gerichte graaf $D = (V, A)$, een capaciteitsfunctie $c : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ en een vraagfunctie $d : V \rightarrow \mathbb{R}$. Een (d, c) -circulatie van D is een functie $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ waarvoor geldt:

$$0 \leq f(a) \leq c(a) \quad \text{voor elke } a \in A \text{ en}$$

$$\sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) = d(v) \quad \text{voor elke } v \in V.$$

Hier staat $\delta^-(v)$ voor de verzameling inkomende pijlen van punt v en $\delta^+(v)$ voor de verzameling uitgaande pijlen van punt v .

Gevraagd wordt om te beslissen of er een (d, c) -circulatie bestaat in een gegeven gerichte graaf D voor een gegeven capaciteitsfunctie c en vraagfunctie d . Bewijs dat dit probleem oplosbaar is in polynomiale tijd door het te formuleren als een Max Flow probleem.

(Merk op dat de vraagfunctie $d(v)$ zowel positieve als negatieve waarden kan aannemen.) Beschrijf je formulering in detail en geef aan hoe die gebruikt kan worden om te beslissen of er een (d, c) -circulatie bestaat. Je hoeft niet te bewijzen dat je formulering correct is.