
Uitwerking Deeltentamen Optimalisering (TW2020)

Maandag 2 november 2015, 11.00 - 13.00

Opgave 1 (5 punten). *Formuleer de duale van het onderstaande LP probleem. Dit kan zonder motivatie.*

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 \\ \text{o.d.v.} & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_2 - 2x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Uitwerking 1.

$$\begin{array}{ll} \max & 3\pi_1 + 2\pi_2 \\ \text{o.d.v.} & 2\pi_1 \leq 3 \\ & \pi_1 + \pi_2 = -4 \\ & -2\pi_2 \leq 4 \\ & \pi_1 \geq 0, \pi_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Opgave 2 (5 punten). *Gegeven is het volgende Simplex tableau voor een minimaliseringprobleem.*

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	5	1	1	-2	0	0	0	0
x_7	2	0	1	0	0	-1	0	1
x_4	1	0	0	-3	1	0	1	0
$-z$	1	0	3	d	0	1	2	0

Geef aan wanneer het bijbehorende (primale) probleem onbegrensd is, geen toegelaten oplossing heeft, één optimale oplossing heeft, of meerdere optimale oplossingen heeft, afhankelijk van de waarde van d . Dit kan zonder motivatie.

Uitwerking 2. *Als $d < 0$ dan is het probleem onbegrensd.*

Als $d > 0$ dan is er één optimale oplossing.

Als $d = 0$ dan zijn er meerdere optimale oplossingen.

Er zijn geen waarden voor d waarvoor er geen toegelaten oplossingen zijn.

Opgave 3 (5 punten). *Een studente heeft nog 26 studiepunten nodig en wil vakken kiezen om deze studiepunten mee te halen. Er zijn 8 vakken die haar interessant lijken en die respectievelijk $p_1, \dots, p_8$ studiepunten waard zijn, en haar inschatting is dat ze voor deze vakken respectievelijk $u_1, \dots, u_8$ uren studietijd nodig heeft. Stel dat deze studente met zo min mogelijk studieuren haar studiepunten wil binnenhalen. Formuleer dit probleem als een ILP probleem.*

Uitwerking 3. Beslissingsvariabelen: $x_1, \dots, x_8$ met $x_i = 1$ als ze vak i gaat volgen en anders $x_i = 0$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^8 u_i x_i \\ \text{o.d.v.} \quad & \sum_{i=1}^8 p_i x_i \geq 26 \\ & x_1, \dots, x_8 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Opgave 4 (10 punten). Gegeven is Farkas' lemma:

Stelling 1. Voor elke $m \times n$ matrix A en vectoren $b \in \mathbb{R}^m$ en $c \in \mathbb{R}^n$ is precies één van de volgende twee beweringen waar:

- $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$
- $\{\pi \in \mathbb{R}^m \mid \pi^T A \geq 0, \pi^T b < 0\} \neq \emptyset$

Gebruik Farkas' lemma om te bewijzen dat voor een $m \times n$ matrix A , een $m \times k$ matrix B en een vector $b \in \mathbb{R}^m$ precies één van de volgende twee beweringen waar is:

- $\exists x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k$ zodanig dat $Ax + By = b$ en $x \geq 0$;
- $\exists \pi \in \mathbb{R}^m$ zodanig dat $\pi^T A \geq 0$, $\pi^T B = 0$ en $\pi^T b < 0$.

Je mag hier de sterke dualiteitsstelling niet bij gebruiken.

Uitwerking 4. Pas Farkas' lemma toe op matrix $A' = [A \quad B \quad -B]$, vector $b' = b$, vector $x' = \begin{bmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \end{bmatrix}$, $n' = n + 2k$ en $m' = m$ (de c wordt niet gebruikt en kan dus buiten beschouwing gelaten worden).

Dan zegt Farkas' lemma dat precies één van de onderstaande twee uitspraken waar is.

$$(a) \{x \in \mathbb{R}^n, y^+ \in \mathbb{R}^k, y^- \in \mathbb{R}^k \mid [A \quad B \quad -B] \begin{bmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \end{bmatrix} = b, x \geq 0, y^+ \geq 0, y^- \geq 0\} \neq \emptyset$$

$$(b) \{\pi \in \mathbb{R}^m \mid \pi^T [A \quad B \quad -B] \geq 0, \pi^T b < 0\} \neq \emptyset$$

Omschrijven geeft dat precies één van de onderstaande twee uitspraken waar is.

$$(a') \exists x \in \mathbb{R}^n, y^+ \in \mathbb{R}^k, y^- \in \mathbb{R}^k \text{ zodanig dat } Ax + By^+ - By^- = b, x \geq 0, y^+ \geq 0, y^- \geq 0$$

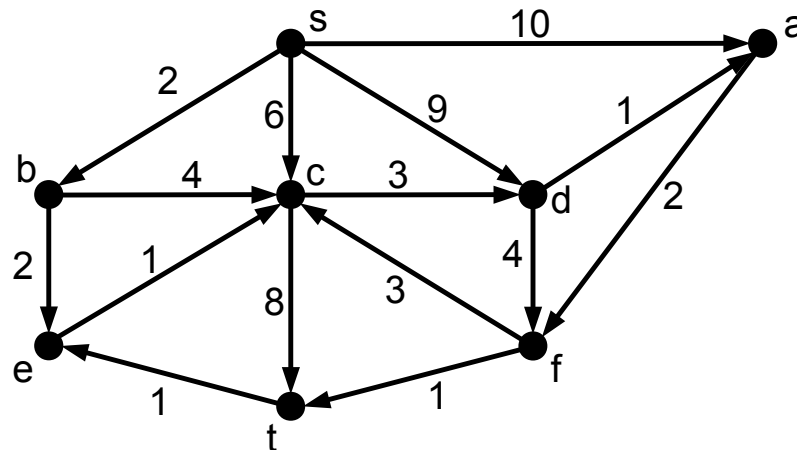
$$(b') \exists \pi \in \mathbb{R}^m \text{ zodanig dat } \pi^T A \geq 0, \pi^T B = 0, \pi^T b < 0$$

Substitutie van $y = y^+ - y^-$ geeft dat precies één van de onderstaande twee uitspraken waar is.

$$(a'') \exists x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k \text{ zodanig dat } Ax + By = b, x \geq 0$$

$$(b'') \exists \pi \in \mathbb{R}^m \text{ zodanig dat } \pi^T A \geq 0, \pi^T B \geq 0, -\pi^T B \geq 0, \pi^T b < 0$$

Opgave 5 (10 punten). Beschouw de onderstaande gerichte graaf $D = (V, A)$ met de aangegeven lengtefunctie $\ell : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. Vind een kortste pad van s naar t in D met betrekking tot de lengtefunctie ℓ . Gebruik hiervoor het algoritme van Dijkstra en geef elke stap van het algoritme duidelijk aan. Geef ook het gevonden kortste s - t pad.



Uitwerking 5. Initialisatie: $W := \{s\}, \rho(s) = 0, \rho(a) := 10, \rho(b) := 2, \rho(c) := 6, \rho(d) = 9$ en $\rho(v) := \infty$ voor alle andere $v \in V$.

Eerste iteratie: $W := \{s, b\}, \rho(e) := 4$

Tweede iteratie: $W := \{s, b, e\}, \rho(c) := 5$

Derde iteratie: $W := \{s, b, e, c\}, \rho(d) := 8, \rho(t) := 13$

Vierde iteratie: $W := \{s, b, e, c, d\}, \rho(a) := 9, \rho(f) := 12$

Vijfde iteratie: $W := \{s, b, e, c, d, a\}, \rho(f) := 11$

Zesde iteratie: $W := \{s, b, e, c, d, a, f\}, \rho(t) := 12$

Zevende iteratie: $W = V$ stop!

Kortste s - t pad: (s, b, e, c, d, a, f, t) (lengte 12).

Opgave 6 (10 punten). *Beschouw het volgende probleem. Gegeven is een gerichte graaf $D = (V, A)$, een capaciteitsfunctie $c : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ en een vraagfunctie $d : V \rightarrow \mathbb{R}$. Een (d, c) -circulatie van D is een functie $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ waarvoor geldt:*

$$0 \leq f(a) \leq c(a) \quad \text{voor elke } a \in A \text{ en}$$

$$\sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) = d(v) \quad \text{voor elke } v \in V.$$

Hier staat $\delta^-(v)$ voor de verzameling inkomende pijlen van punt v en $\delta^+(v)$ voor de verzameling uitgaande pijlen van punt v .

Gevraagd wordt om te beslissen of er een (d, c) -circulatie bestaat in een gegeven gerichte graaf D voor een gegeven capaciteitsfunctie c en vraagfunctie d . Bewijs dat dit probleem oplosbaar is in polynomiale tijd door het te formuleren als een Max Flow probleem.

(Merk op dat de vraagfunctie $d(v)$ zowel positieve als negatieve waarden kan aannemen.) Beschrijf je formulering in detail en geef aan hoe die gebruikt kan worden om te beslissen of er een (d, c) -circulatie bestaat. Je hoeft niet te bewijzen dat je formulering correct is.

Uitwerking 6. *Voeg een bron s en een put t toe.*

Voor elk punt $v \in V$ waarvoor $d(v) < 0$, voeg een pijl van s naar v toe met capaciteit $c(v) = -d(v)$.

Voor elk punt $u \in V$ waarvoor $d(u) > 0$, voeg een pijl van u naar t toe met capaciteit $c(u) = d(u)$.

Nu bestaat er een (d, c) -circulatie in de originele gerichte graaf D dan en slechts dan als er een s - t stroom bestaat met waarde

$$\sum_{a \in \delta^+(s)} c(a) = \sum_{a \in \delta^-(t)} c(a)$$

in de aangepaste gerichte graaf.