

## Tentamen TW2020 Optimalisering (Delft) en Besliskunde 1 (Leiden)

9 januari 2015, 10.00 - 13.00 uur

Het tentamen bestaat uit zes opgaven. Laat bij elk antwoord duidelijk zien hoe je eraan bent gekomen. Bij elke opgave staat het bijbehorende aantal punten. Het uiteindelijke tentamencijfer krijg je door het totaal aantal punten door zes te delen.

Het gebruik van een laptop is niet toegestaan. Het gebruik van een *niet-grafische* rekenmachine is wel toegestaan. Veel succes!

---

1. Het bedrijf Silicon Valley Inc. in San Fransisco wil samenwerken met het bedrijf Big Park Inc. in New York. Silicon Valley wil een groep van 10 mensen naar de vergadering met Big Park sturen en zoeken vliegtickets op het Internet. De vergadering is al overmorgen en alle rechtstreekse vluchten morgen zijn helaas vol. De mensen bij Silicon Valley vinden een paar keer overstappen niet erg, en na lang zoeken vinden ze de volgende mogelijke vluchten voor morgen en de bijbehorende aantal vrije stoelen:

| Van           | Naar     | Aantal vrije stoelen |
|---------------|----------|----------------------|
| San Fransisco | Denver   | 5                    |
| San Fransisco | Houston  | 6                    |
| Denver        | Atlanta  | 4                    |
| Denver        | Chicago  | 2                    |
| Houston       | Atlanta  | 5                    |
| Atlanta       | New York | 7                    |
| Chicago       | New York | 4                    |

De vraag is of alle 10 mensen via de bovengenoemde vluchten naar New York kunnen.

- (a) (2 punten) Welk gerelateerd netwerkprobleem zou je kunnen oplossen om de vraag te kunnen beantwoorden? Specificeer daarbij alle input die het netwerk  $N = (s, t, V, A, c)$  representeert.
- (b) (8 punten) Los het netwerkprobleem op en beantwoord de vraag of de groep van 10 mensen vervoerd kan worden van San Fransisco naar New York met de gegeven combinaties van vluchten. Geef daarbij aan welk algoritme je gebruikt en maak duidelijk wat in elke iteratie gebeurt.

2. Beschouw het volgende lineaire optimaliseringsprobleem:

$$\begin{aligned} \max z = & \quad 3x_1 + x_2 \\ \text{odv} \quad & \quad x_1 - x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - x_2 \leq -3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) (3 punten) Stel het starttableau van het Simplex fase I probleem op voor dit probleem. LOS DIT PROBLEEM NIET OP!  
(Het Simplex fase I probleem is het probleem om een eerste toegelaten basisoplossing te bepalen.)
- (b) (4 punten) Aan het einde van Simplex fase 1 is het volgende simplextableau verkregen:

| basis | $\bar{b}$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $a_1$ | $a_2$ |
|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $-w$  | 0         |       |       |       |       |       | 1     | 1     |
| $x_2$ | 2         |       | 1     | -2/3  |       | 1/3   | 2/3   |       |
| $x_1$ | 1         | 1     |       | 1/3   |       | 1/3   | -1/3  |       |
| $s_2$ | 0         |       |       | -1/3  | 1     | 2/3   | 1/3   | -1    |

Is de verkregen basisoplossing optimaal met betrekking tot de oorspronkelijke doelfunctie  $\max z = 3x_1 + x_2$ ? Gebruik de relatieve kosten  $\bar{c}_j$  om je antwoord te onderbouwen.

3. Gegeven is het primale probleem

$$(P): \min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \text{ odv } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \geq 0,$$

en het bijbehorende duale probleem:

$$(D): \max w = \sum_{i=1}^m b_i y_i, \text{ odv } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad y \geq 0,$$

Zij  $\hat{x}$  een toegelaten primale oplossing en  $\hat{y}$  een toegelaten duale oplossing.

- (a) (5 punten) Bewijs dat  $\sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j \geq \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i$ .
- (b) Beschouw het volgende primale probleem:

$$\begin{aligned} \min z = & \quad x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{odv} \quad & -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 \leq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) (3 punten) Formuleer het bijbehorende duale probleem.
- (ii) (3 punten) De unieke optimale oplossing van het duale probleem is:

$$\pi^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Is het extreempunt behorend bij deze oplossing gedegenereerd? Wat betekent dit voor het *primal* probleem? Motiveer de beide antwoorden.

- (iii) (3 punten) Gebruik de complementary slacknessvoorwaarden om één optimale primale oplossing en de bijbehorende doelfunctiewaarde te bepalen.
4. (6 punten) Bepaal een kortste opspannende boom in de graaf gegeven in figuur 1. Gebruik hierbij het greedy algoritme. Geef aan in welke volgorde de takken aan de boom worden toegevoegd

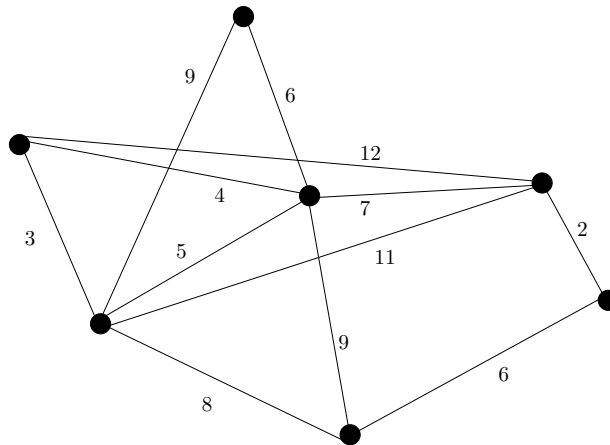


Figure 1:

5. (a) (6 punten) Het probleem INDEPENDENT SET is als volgt gedefinieerd:

INDEPENDENT SET: Gegeven een ongerichte graaf  $G = (V, E)$  en een geheel getal  $k$ , bevat  $G$  een deelverzameling  $W \subseteq V$  van punten, met  $|W| \geq k$ , zodanig dat voor ieder paar  $u, v \in W$  geldt dat de kant  $\{u, v\}$  **niet** tot  $E$  behoort.

Bewijs dat INDEPENDENT SET een NP-volledig probleem is. Je mag veronderstellen dat CLIQUE NP-volledig is.

CLIQUE: Gegeven een ongerichte graaf  $G' = (V', E')$  en een geheel getal  $k'$ , bevat  $G'$  een volledige deelgraaf van grootte ten minste  $k'$ ?

- (b) (3 punten) Geef antwoord “waar” of “niet waar” op de volgende vragen. (Geen toelichting nodig.)
- (i) Als we voor een NP-moeilijk minimaliseringsprobleem  $\bar{\Pi}$  een  $\rho$ -approximatie-algoritme vinden met  $\rho = 1$ , dan impliceert dit dat de complexiteitsklassen P en NP gelijk zijn. (NB: Een algoritme  $A$  is een  $\rho$ -approximatiealgoritme voor een minimaliseringsprobleem  $\Pi$  als  $A$  voor iedere instantie  $I$  van  $\Pi$  in polynomiale tijd een oplossing produceert van waarde  $z_A(I)$  zodanig dat  $z_A(I) \leq \rho \cdot z_{OPT}(I)$ , waarbij  $z_{OPT}(I)$  de optimale oplossing is van  $I$ .)
  - (ii) Laat  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$  de verzameling toegelaten oplossingen zijn van een LP-probleem. Als de voorwaardenmatrix  $A$  Totaal Unimodulair is en de vector  $b$  geheeltallig, dan geldt dat alle extreempunten van  $P$  geheeltallig zijn.
  - (iii) Zij  $f(n) = 13n^3 + 102n^2 + 200$  en  $g(n) = n^3$ . Er geldt dat  $f(n) = \Theta(g(n))$ .

6. Beschouw het volgende geheeltallige optimaliseringsprobleem.

$$\begin{array}{llllll}
 \min z = & 8x_1 & - & 5x_2 & & \\
 \text{odv} & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 5 \\
 & -2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & & & x_2 & \geq & 3 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0, \text{ geheeltallig.}
 \end{array}$$

Het optimale tableau van het oplossen van de LP-relaxatie is als volgt:

| basis | $\bar{b}$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $-z$  | 11        |       |       |       | 4     | 3     |
| $s_1$ | 3/2       |       |       | 1     | -1/2  | -3    |
| $x_2$ | 3         |       | 1     |       |       | -1    |
| $x_1$ | 1/2       | 1     |       |       | -1/2  | -1    |

- (a) (8 punten) Los het probleem op met behulp van branch-and-bound. Gebruik de zoekstrategie “depth-first”, waarbij de  $\leq$ -tak het eerst wordt onderzocht. Je mag de deelproblemen grafisch oplossen.
- (b) (i) (3 punten) Bepaal een Gomorysnede van de rij van het simplextableau behorend bij basisvariabele  $x_1$ . Druk daarna de snede uit in termen van de oorspronkelijke variabelen  $x_1$  en  $x_2$ .
- (ii) (3 punten) Voeg de snede toe aan de oorspronkelijke LP-relaxatie en los het resulterende probleem op met behulp van *duale simplex*. Geef de resulterende oplossing en de bijbehorende doelfunctiewaarde.