Oplossingen tentamen 9 januari 2015

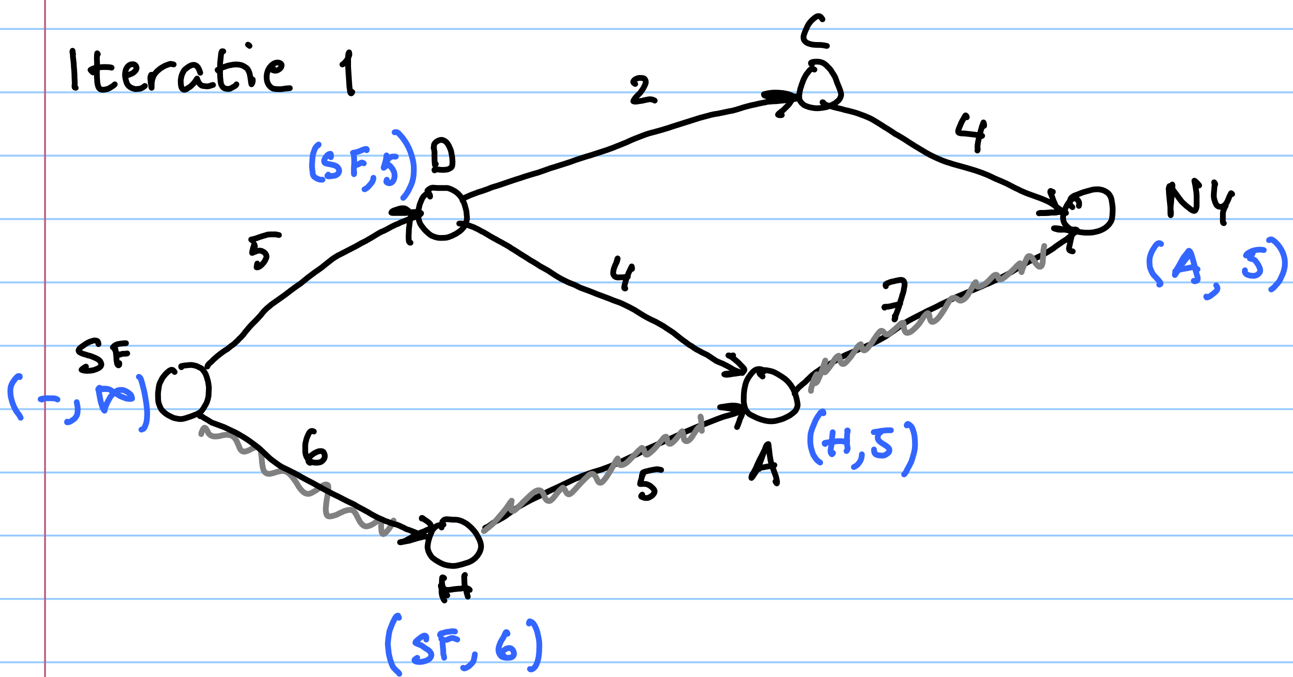
1 a) Los een max flow probleem op als volgt:

s = San Fransisco
t = New York
V = Denver, Houston, Chicago, Atlanta
E = de verbindingen gegeven door de vluchten
c = capaciteit (# stoelen) op de gegeven vluchten

Als max flow $\geq$ 10, dan kan de gehele groep mee.

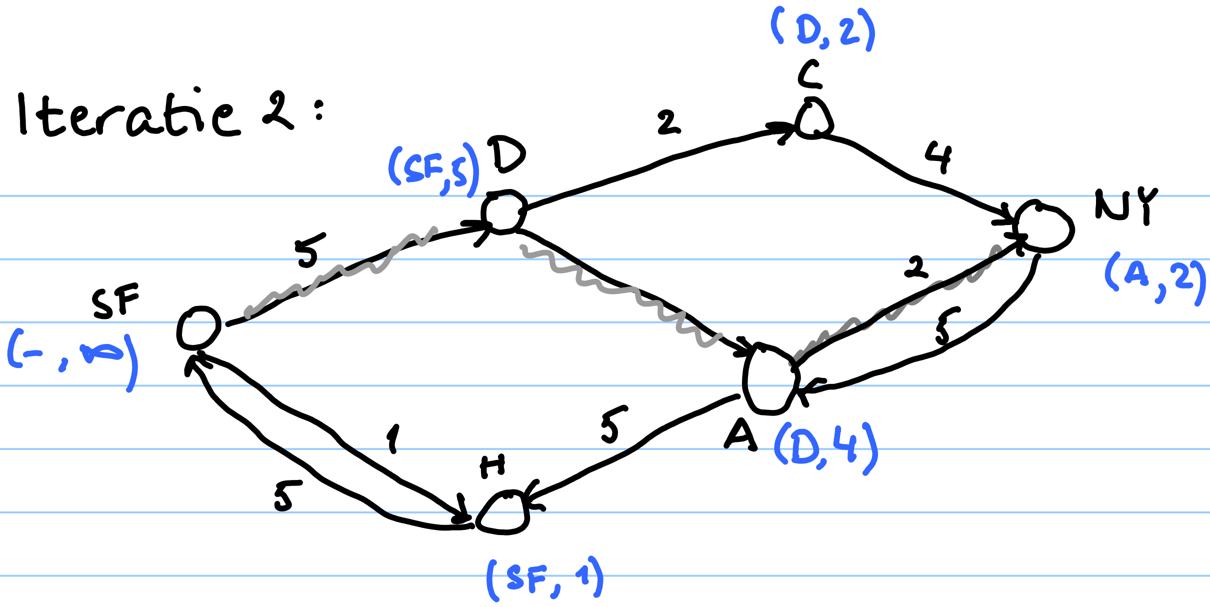
b)

Iteratie 1



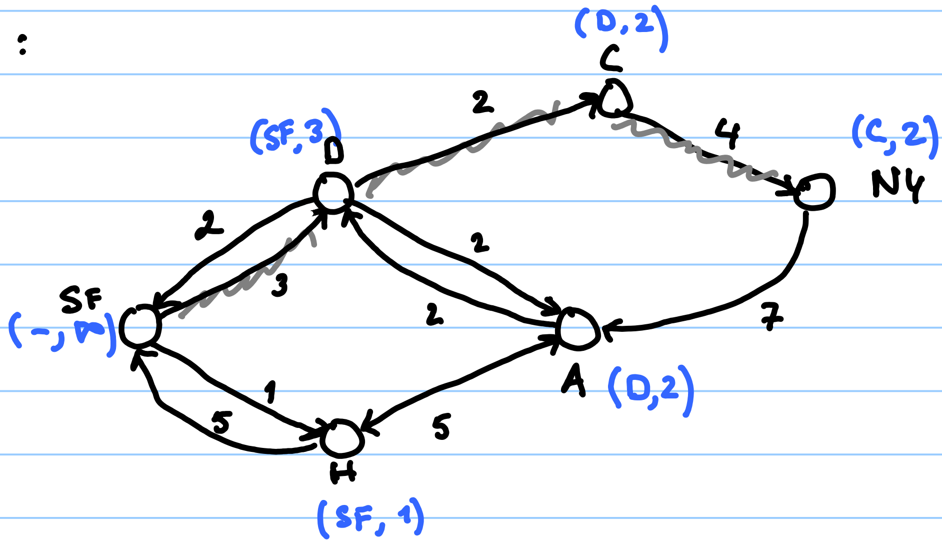
Pad 1: SF → H → A → NY met cap. 5

Iteratie 2:



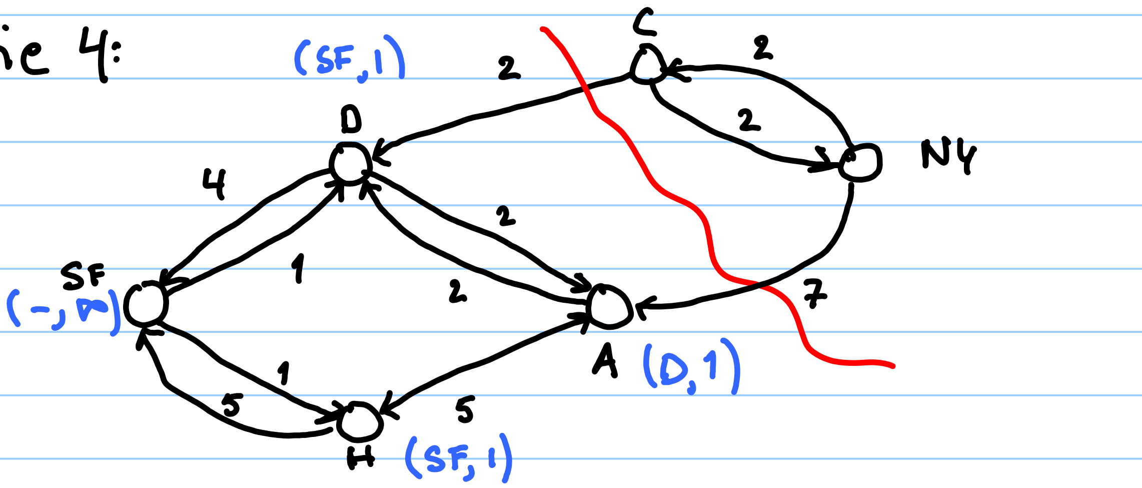
Pad 2: SF → D → A → NY met cap. 2

Iteratie 3:



Pad 3: SF → D → C → NY met cap. 2

Iteratie 4:



Max flow = 9 < 10 ⇒ De groep kan niet helemaal mee, alleen 9 van de 10 kunnen mee.

2 a Voorwaarden:

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 - s_1 \qquad\qquad + a_1 & = & 1 \\ x_1 + x_2 \quad - s_2 \qquad\qquad + a_2 & = & 3 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + s_3 & = & 4 \end{array}$$

Doelfunctie: $\min\ w = a_1 + a_2 = 4 - 2x_2 + s_1 + s_2$

Starttableau:

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2
$-w$	-4		-2	1	1			
a_1	1	-1	1	-1			1	
a_2	3	1	1		-1			1
s_3	4	2	1			1		

b) $z = 3x_1 + x_2$

$$x_1 + \tfrac{1}{3}s_1 + \tfrac{1}{3}s_3 = 1$$
$$x_2 - \tfrac{2}{3}s_1 + \tfrac{1}{3}s_3 = 2$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{1}{3}s_3$$
$$x_2 = 2 + \tfrac{2}{3}s_1 - \tfrac{1}{3}s_3$$

$$z = 3\left(1 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{1}{3}s_3\right) + \left(2 + \tfrac{2}{3}s_1 - \tfrac{1}{3}s_3\right)$$

$$= 5 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{2}{3}s_3$$

$\bar{c}_{s_1} = -\tfrac{1}{3}$, $\bar{c}_{s_3} = -\tfrac{2}{3}$, overige $\bar{c}_j = 0$

$\bar{c}_j \leq 0 \ \forall j \Rightarrow$ de verkregen oplossing is optimaal.

3 a) Primale voorw. vermenigvuldigen met $\hat{y}_i$ en dan optellen:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i \leq \sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j \right) \quad (1)$$

OK, want $\hat{y}_i \geq 0$

Duale voorw. vermenigvuldigen met $\hat{x}_j$ en dan optellen:

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{y}_i \right) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j \quad (2)$$

OK, want $\hat{x}_j \geq 0$

Het volgende geldt:

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{y}_i \right)$$

We hebben nu:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i} \leq \sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{y}_i \right)$$

$$\leq \underline{\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j}$$

b)
(i)

$$\begin{aligned} \max\ w = {} & 3\pi_1 + \pi_2 \\ \text{odv} \quad & -\pi_1 + \pi_2 \geq 1 \\ & \pi_1 + \pi_2 \geq 3 \\ & 2\pi_1 + \pi_2 \leq 4 \\ & \pi_1, \pi_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(ii) Ja, want alle slackvariabelen zijn gelijk aan 0 $\Rightarrow$ 1 basisvariabele heeft waarde 0.

Het primale probleem heeft een niet-uniek optimum, want een uniek gedegenereerd optimum in het duale probleem impliceert niet-uniek primaal optimum

(iii) $\pi_1, \pi_2 > 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \quad (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \quad (2) \end{aligned}$$

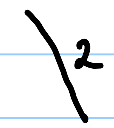
Zet bv $x_1 = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$

De oplossing $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ met $z^* = 5$

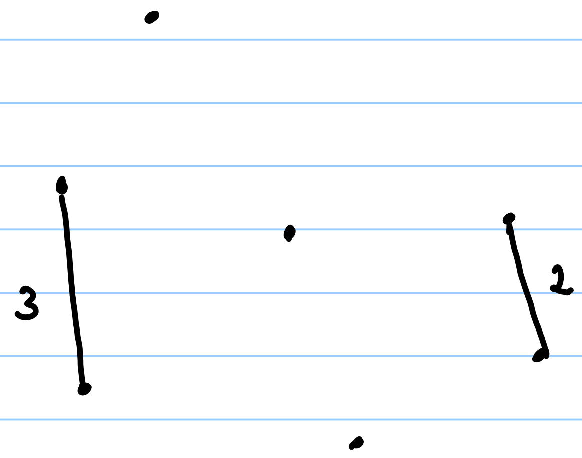
moet optimaal zijn, want hij is toegelaten en voldoet, samen met π^* aan de complementary slacknessvoorwaarden. De doelfunctiewaarden van x^* en π^* zijn gelijk.

4

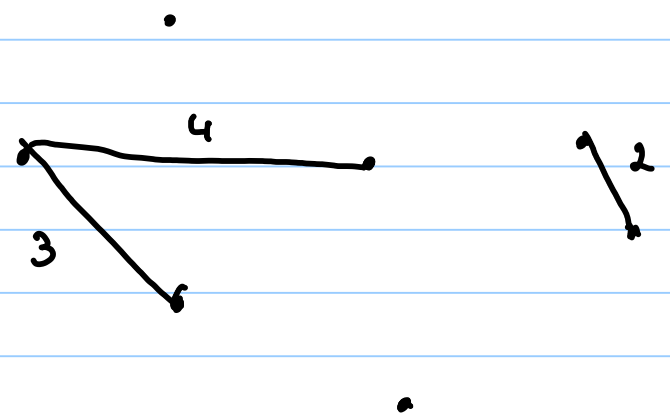
1



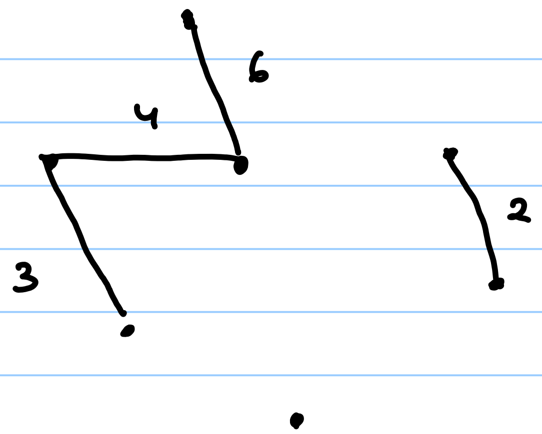
2



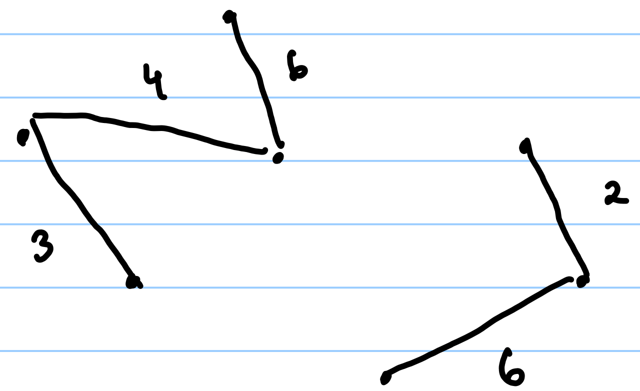
3

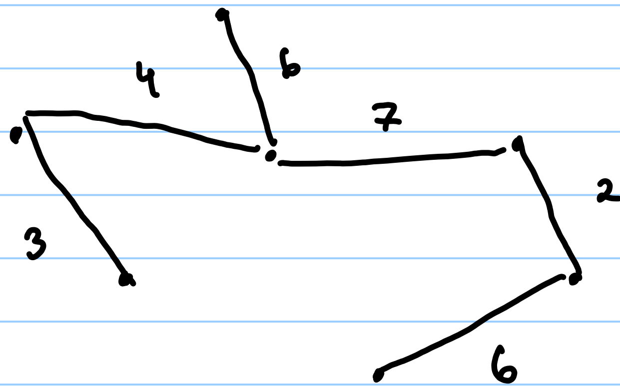


4



5





MST met lengte 28

5 a) INDEPENDENT SET $\in$ NP, want gegeven een ja-instantie met bijbehorende W, kunnen we voor elk punt $v \in W$ nagaan dat v niet grenst aan een andere punt in W.

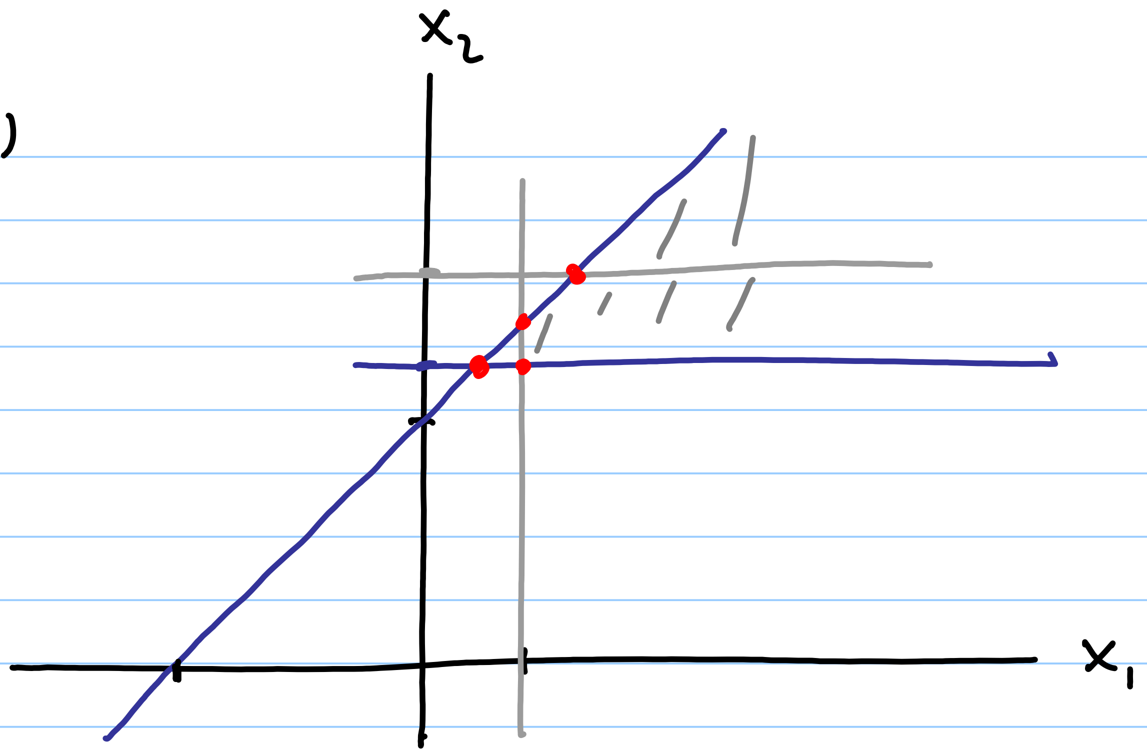
CLIQUE $\leq$ INDEPENDENT SET: Gegeven een instantie van CLIQUE, construeer de volgende instantie van INDEPENDENT SET

$$V = V'$$
$$E = \{ \{i,j\} : i \neq j, \{i,j\} \notin E' \}$$

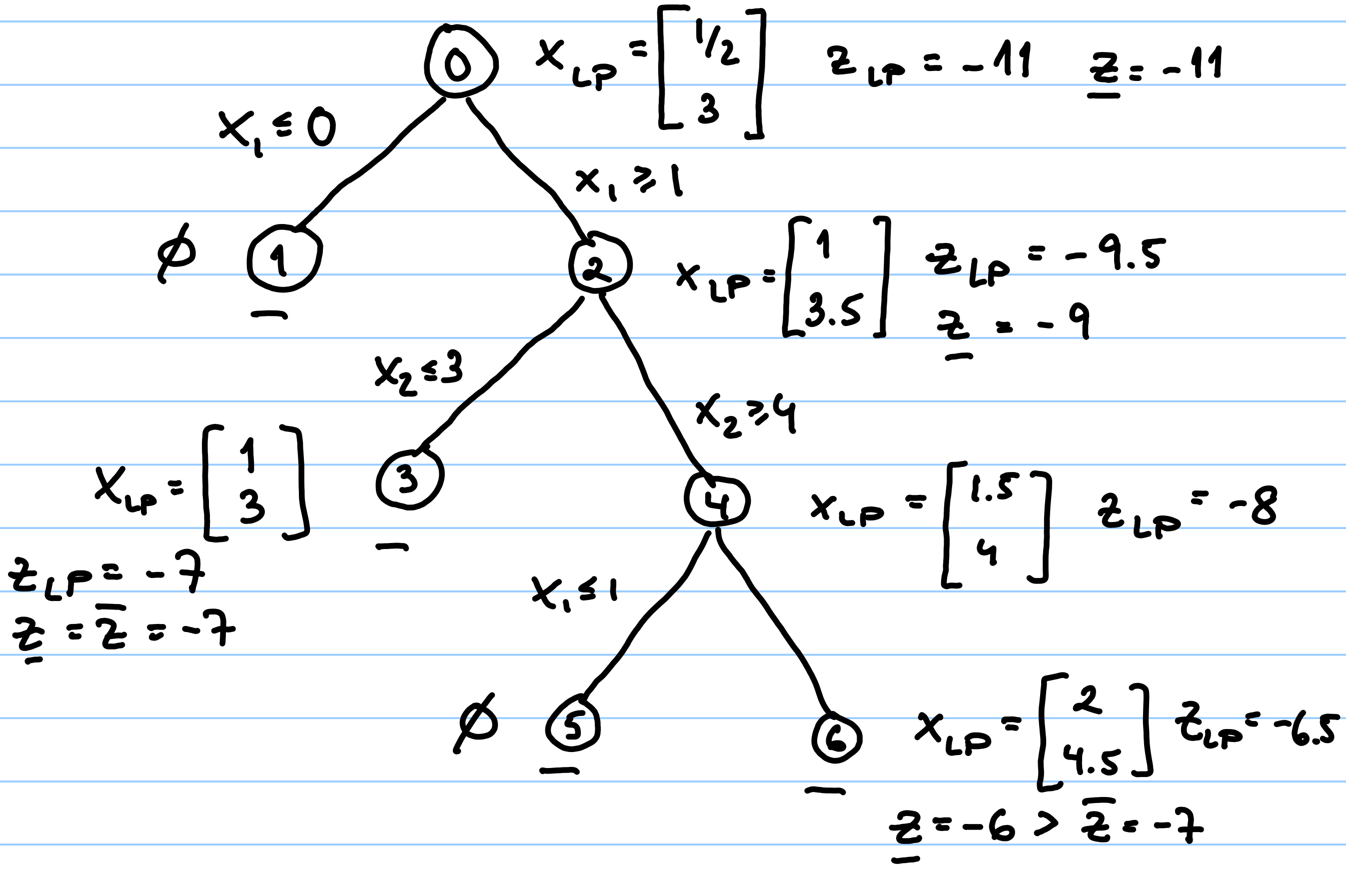
Een verzameling $W \in V$ is independent in G
$\Leftrightarrow$
W vormt een clique in G'

b) (i) waar
(ii) waar
(iii) waar

6 a)



$\bar{z} = \cancel{0}$ $\quad \bar{z} = -7$



$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad z^* = -7$$

b) (i)

rij x_1 : $\quad x_1 - \frac{1}{2}s_2 - s_3 = \frac{1}{2}$

$$x_1 + \left(-1+\frac{1}{2}\right)s_2 - s_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 - s_2 - s_3 = \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s_2}_{\leq 0}$$

Gomorysnede : $\frac{1}{2}s_2 \geq \frac{1}{2}$

$$s_2 = 5 + 2x_1 - 2x_2 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2} + x_1 - x_2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \quad -x_1 + x_2 \leq 2$$

(ii)

$$-\frac{1}{2}s_2 + s_4 = -\frac{1}{2}$$

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
$-z$	11				4	3		$r_1 + 8r_4$
s_1	3/2			1	-1/2	-3		$r_1 - r_4$
x_2	3		1			-1		r_2
x_1	1/2	1			-1/2	-1		$r_3 - r_4$
s_4	-1/2				-1/2		1	$r_2 \cdot (-2)$
$-z$	7					3	8	
s_1	2			1		-3	-1	
x_2	3		1			-1		
x_1	1	1				-1	-1	
s_2	1				1		-2	

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad z^* = -7$$