

Hertentamen Optimalisering (Delft) en Besliskunde 1 (Leiden)

15 april 2014, 14.00-17.00 uur

Het tentamen bestaat uit 6 opgaven. Motiveer je antwoorden duidelijk. De normering van de opgaves staat steeds tussen haakjes bij de respectievelijke onderdelen. Het uiteindelijke cijfer is het totaal der punten gedeeld door 6. Het gebruik van een laptop of grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Succes!

Opgave 1 (10pt) Een fabriek produceert vier producten (1, 2, 3, 4) op twee machines (X, Y). De bewerkingstijd in minuten per machine voor elk product wordt gegeven door

product	X	Y
1	10	27
2	12	19
3	13	33
4	8	12

en de opbrengst per product is 10, 12, 17 en 8 euro respectievelijk.

Product 1 *moet* een bewerking ondergaan op beide machines X en Y . Producten 2, 3 en 4 hoeven slechts op één van beide machines te worden uitgevoerd. De fabriek heeft beperkte opslagcapaciteit: de wekelijkse productie moet opgeslagen kunnen worden op een oppervlakte van maximaal 50 m². De producten nemen een oppervlakte van 0.1, 0.15, 0.5 en 0.05 m² respectievelijk in beslag.

De vraag naar producten 2 en 3 blijkt gekoppeld te zijn: per week is ongeveer twee keer zo veel van product 2 nodig als van product 3. Het bedrijf eist dat hier maximaal 5% van afgeweken mag worden (5% van de factor 2).

Verder is machine X per week 7% van de tijd buiten gebruik, en machine Y 9% van de tijd. Neem aan dat een werkweek 40 uur duurt.

- Formuleer het probleem om de wekelijkse opbrengst te maximaliseren als een geheeltallig lineair programmeringsprobleem (ILP).
- Voor product 4 moet een machine speciaal voorbereid worden. De bedrijfsleiding eist daarom dat de productie van 4 op hooguit één machine plaats vindt. Wat moeten worden toegevoegd om dit te modelleren als een ILP?

Opgave 2 (10pt) Los het onderstaande ILP op met Branch-and-Bound. Je mag de LP's oplossen met een plaatje, maar gebruik dan de (ortho)normaalttest om optimaliteit te beargmenteren. *Hint:* ga bij het vertakken eerst langs de “ $\geq$ ” tak.

$$\begin{array}{ll} \max & z = -3x_1 + 9x_2 \\ \text{o.d.v.} & -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Opgave 3 (8pt) Een producent van schoolrekenmachines moet zijn producten transporteren van productiefaciliteiten A, B en C naar distributiecentra 1, 2, 3 en 4. De transportkosten per rekenmachine en km zijn 0,0002 euro. De relevante afstanden in km staan in onderstaande tabel:

Productie faciliteit	Distributiecentrum			
	1	2	3	4
A	300	1000	500	400
B	500	900	300	600
C	1300	1000	1100	1200

Het aanbod bij de productiefaciliteiten, en de vraag bij de distributiecentra zijn als volgt:

Aanbod	Vraag
A: 1500	1: 2000
B: 2500	2: 1500
C: 4000	3: 1200
	4: 3200

Op dit moment hanteert het bedrijf het volgende transportschema:

Van	Naar	Hoeveelheid
A	1	300
A	3	1200
B	1	1700
B	4	800
C	2	1500
C	4	2400

Minimaliseert dit transportschema de totale transportkosten? Zo ja, motiveer je antwoord, zo niet, bepaal de optimale oplossing.

Opgave 4 (12pt)

- a) Zijn de volgende uitspraken *waar* of *niet waar*? Je hoeft je antwoord niet te motiveren.
- i) Stel dat een gegeven primaal probleem niet-toegelaten is. Dan is het duale probleem ook niet-toegelaten.
 - ii) Gegeven is een LP-probleem waarop de simplexmethode wordt toegepast. In een iteratie ontstaat een tableau met in de kolom onder de intredende variabelen alleen negatieve waarden. Dan is het probleem begrensd.
 - iii) Het simplex algoritme berekent in elke iteratie een primaal toegelaten oplossing. Het algoritme stopt zodra de duale variabelen toegelaten zijn voor het duale probleem.
 - iv) Je kunt niet voorkomen dat het simplex algoritme gaat cykelen.
- b) Gegeven zijn problemen $P, Q \in \mathcal{NP}$ en $P \succeq Q$, oftewel probleem P is polynomiaal reduceerbaar naar Q . Geef een antwoord en korte motivatie bij onderstaande vragen.
- i) Stel $P \in \mathcal{P}$, wat kun je concluderen over Q ?
 - ii) Stel $P \in \mathcal{NPC}$, wat kun je concluderen over Q ?
 - iii) Stel $Q \in \mathcal{P}$, wat kun je concluderen over P ?
 - iv) Stel $Q \in \mathcal{NPC}$, wat kun je concluderen over P ?
- c) Bewijs dat het *onafhankelijkheidsprobleem* $\mathcal{NP}$ -volledig is. Je mag hierbij gebruiken dat het *klikenprobleem* $\mathcal{NP}$ -volledig is.

Onafhankelijkheidsprobleem

Gegeven: een niet-gerichte graaf $G = (V, E)$ en een natuurlijk getal k .

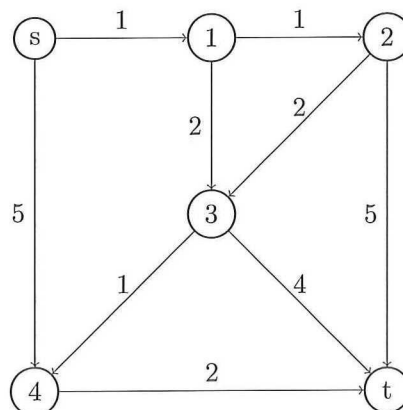
Probleem: heeft G een onafhankelijke verzameling met k elementen (d.w.z. is er een k -tal knooppunten zdd. geen enkel tweetal van deze k knooppunten door een tak van de graaf verbonden is)?

Klikenprobleem

Gegeven: niet-gerichte graaf $G = (V, E)$ en een natuurlijk getal k .

Probleem: heeft G een klik met k elementen (d.w.z. is er een k -tal knooppunten zdd. ieder tweetal van deze k knooppunten door een tak verbonden is)?

Opgave 5 (8pt) Bepaal het kortste (s, t) -pad in onderstaand netwerk met gebruikmaking van het algoritme van Dijkstra. Noteer zowel de stappen in het algoritme als het eindantwoord.



Opgave 6 (12pt) Beschouw het onderstaande probleem

$$(P) \quad \begin{cases} \min z = & 4x_1 & + & 3x_2 \\ \text{o.d.v.} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 15 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0. \end{cases}$$

- Formuleer het duale probleem van (P) en los het duale probleem op m.b.v. het simplex algoritme.
- Waarom is het hier efficiënter om het duale probleem op te lossen in plaats van het primale probleem?
- Formuleer de complementary slackness (orthogonaliteits-) voorwaarden en geef m.b.v. deze voorwaarden de optimale oplossing voor het primale probleem.
- De optimale oplossing van het primale probleem correspondeert met onderstaand tableau (hierbij zijn s_1 en s_2 surplus variabelen).

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2
$-z$	-35	0	0	1	2
x_1	5	1	0	-1	1
x_2	5	0	1	1	-2

Los het probleem op met duale simplex als de extra voorwaarde $x_1 \geq 6$ toegevoegd wordt.

Toets Analyse 2, TW1070 en WI1601
14 april 2014, 9.00-11.00

- Een rekenmachine of formuleblad is niet toegestaan.
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- De waardering voor iedere vraag staat in de kantlijn. Het cijfer wordt bepaald met de formule
$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 5}{5}$$

- (5) 1. Bepaal de limiet, of laat zien dat de limiet niet bestaat:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x + 3y}{\sqrt{4x^2 + 9y^2}}.$$

- (4) 2. a) Maak de volgende definities af.

(1) De functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is *differentieerbaar* in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ als ...

(2) Zij $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ met $\|\mathbf{v}\| = 1$. De functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heeft een *richtingsafgeleide* in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ naar $\mathbf{v}$ als ...

- (3) b) Toon aan met de definities:

Als f differentieerbaar is $\mathbf{a}$, dan bestaat de richtingsafgeleide $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a})$.

De functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$.

- (4) c) Beargumenteer waarom f differentieerbaar is in $(3, 1, 4)$ en bepaal de afgeleide $f'(3, 1, 4)$.

- (3) d) Voor welke vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ is de richtingsafgeleide $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(3, 1, 4)$ minimaal?

3. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}.$$

- (4) a) Beredeneer waarom f een globaal minimum en een globaal maximum heeft.

- (3) b) Bereken de gradiënt $\nabla f(x, y)$.

- (5) c) Bereken de extremen van f (plaats, aard en grootte).

Z.O.Z.

- (7) 4. Het gebied $G \subset \mathbb{R}^2$ is gegeven door

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \text{ en } \sqrt{y} \leq x \leq 1\}.$$

Bereken $\iint_G \frac{1}{1+x^6} d(x, y)$.

Hint: $\frac{d}{du} \arctan u = \frac{1}{1+u^2}$

5. De kromme $C \subset \mathbb{R}^3$ is de snijkromme van de cilinder $x^2 + z^2 = 1$ en het vlak $x + y + z = 1$.

- (4) a) Geef een parametervoorstelling van C .
(3) b) Geef een parametervoorstelling van de raaklijn aan C in $(0, 0, 1)$.

EINDE

Tentamen lineaire algebra 2

17 april 2014, 14:00 – 17:00

zalen 174, 412

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs je antwoorden.

Opgave 1.

- (a) Bepaal de Jordannormaalvorm, inclusief de bijbehorende coördinatentransformatie, van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Bereken de matrix $\exp(A) = e^A$.

Opgave 2. Zij $\phi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ de symmetrische bilineaire vorm gegeven door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal een basis van $\mathbf{R}^3$ ten opzichte waarvan ϕ gegeven wordt door een diagonaalmatrix.
- (b) Bepaal de rang en de signatuur van ϕ .

Opgave 3. Beschouw de kwadratische vorm $q(x, y) = x^2 - 6xy + y^2$.

- (a) Bepaal een symmetrische matrix A zodat voor alle $x, y \in \mathbf{R}$ geldt

$$q(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (b) Bepaal twee reële getallen a, b en een isometrie $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ zodat geldt $q(f(u, v)) = au^2 + bv^2$ voor alle $u, v \in \mathbf{R}$.

Opgaven 4 en 5 staan op de volgende pagina

Opgave 4. Geef een voorbeeld of bewijs dat niet bestaat:
(bewijs altijd je antwoord)

- (a) Een lineaire afbeelding $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ die normaal is, maar niet zelfgeadjungeerd (self-adjoint).
- (b) Een isomorfisme $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ dat normaal is, maar geen isometrie.
- (c) Een lineaire afbeelding $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ die normaal is, maar niet orthogonalisierbar over $\mathbf{R}$.

Opgave 5. Zij V de reële vectorruimte van polynomen van graad ≤ 2 over $\mathbf{R}$ en definiëer voor elk geheel getal $i \in \mathbf{Z}$ de afbeelding

$$\begin{aligned}\psi_i : \quad V \times V &\longrightarrow \mathbf{R}, \\ (p(x), q(x)) &\longmapsto \int_{-1}^1 p(x)q(x-i)dx.\end{aligned}$$

- (a) Geef de definitie van een bilineaire vorm, en bewijs voor alle $i \in \mathbf{Z}$ dat ψ_i een bilineaire vorm is.
- (b) Voor welke i is ψ_i een inproduct?
- (c) Definieer $\chi \in V^*$ door $\chi(p) = p(2)$. Laat zien dat er een element $q \in V$ is met voor alle $p \in V$: $\chi(p) = \psi_0(p, q)$.