

Uitwerkingen tentamen Optimaliseren

15 April 2014

Opgave 1

X_i = geproduceerde hoeveelheid van product i

y_{ij} = geproduceerde hoeveelheid van product i op machine j .

$$\max 10X_1 + 12X_2 + 17X_3 + 8X_4$$

$$\text{odv. } 0.1X_1 + 0.15X_2 + 0.5X_3 + 0.05X_4 \leq 50 \quad (\text{Opslagruimte})$$

$$10y_{11} + 12y_{21} + 13y_{31} + 8y_{41} \leq (1 - 0.07) \cdot 40 \cdot 60 \quad (\text{capaciteit machines})$$

$$27y_{12} + 19y_{22} + 33y_{32} + 12y_{42} \leq (1 - 0.09) \cdot 40 \cdot 60$$

$$X_2 \geq 0.95 \cdot 2 \cdot X_3$$

(koppeling X_2 en X_3)

$$X_2 \leq 1.05 \cdot 2 \cdot X_3$$

$$X_1 = y_{11}$$

$$X_3 = y_{31} + y_{32}$$

$$X_{21} = y_{12}$$

$$X_4 = y_{41} + y_{42}$$

(koppeling X_i en y_{ij})

$$X_2 = y_{21} + y_{22}$$

$$X_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2.$$

b.

$$z = \begin{cases} 1 & \text{als product 4 op machine 1 wordt geproduceerd} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$y_{41} \leq M \cdot z$$

$$y_{42} \leq M \cdot (1 - z)$$

$$z \in \{0, 1\}$$

M groot genoeg.

Opgave 2

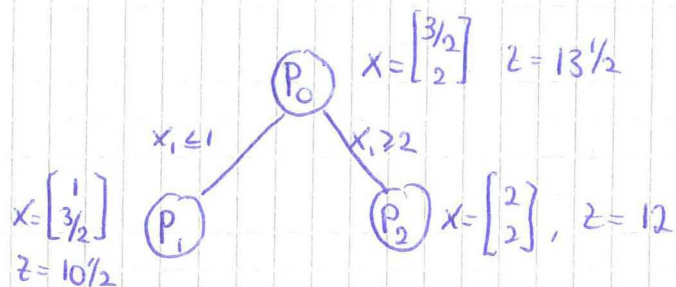
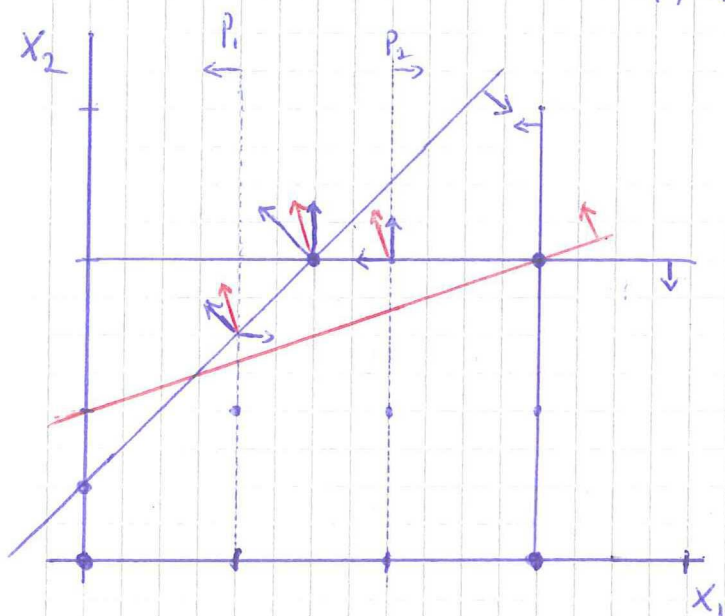
$$\max z = -3x_1 + 9x_2$$

$$-2x_1 + 2x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 3$$

$x_1, x_2 \geq 0$, geheeltallig.



$$P_0 \Rightarrow x_1 = 1\frac{1}{2}, x_2 = 2, z = 13\frac{1}{2}, \quad \bar{z} = 13$$

$$P_1 := P_0 + \{x_1 \leq 1\} \quad P_2 := P_0 + \{x_1 \geq 2\}$$

$$P_2 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 2, z = 12$$

Toegelaten oplossing gevonden $\bar{z} = 12$.

$$P_1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{2}, z = 10\frac{1}{2}, \quad \bar{z} = 10$$

$\bar{z} \leq z$. Dus afsnijden.

$$\text{Optimale oplossing: } x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad z^* = 12.$$

Opgave 3 Merk op: totale vraag $\neq$ totale aanbod.

$$\text{totale vraag} = 2000 + 1500 + 1200 + 3200 = 7900$$

$$\text{totale aanbod} = 1500 + 2500 + 4000 = 8000$$

We voegen een dummy distributiecentrum toe met vraag 100.

Omdat de transportkosten proportioneel zijn met de afstand, kunnen we ook de afstand minimaliseren.

	300		200		500		400		-800	
0	300	300 ⁺	1000		500	1200 ⁻	400		0	
200	500	1700 ⁻	900		300	+	600	800	0	
800	1300		1000	1500	1100		1200	2400	0	100

Dit is niet de optimale oplossing, omdat we voor faciliteit B en centrum 3 hebben dat $U_B + V_3 = 200 + 500 = 700 > 300 = C_{B3}$.

We voegen tak (B, 3) toe en verwijderen de tak (A, 3).

	300		-200		100		400		-800	
0	300	1500 ⁻	1000		500		400	+	0	
200	500	500 ⁺	900		300	1200	600	800 ⁻	0	
800	1300		1000	1500	1100		1200	2400	0	100

Voor alle i en j geldt $U_i + V_j \leq C_{ij}$. Dus oplossing is optimaal.

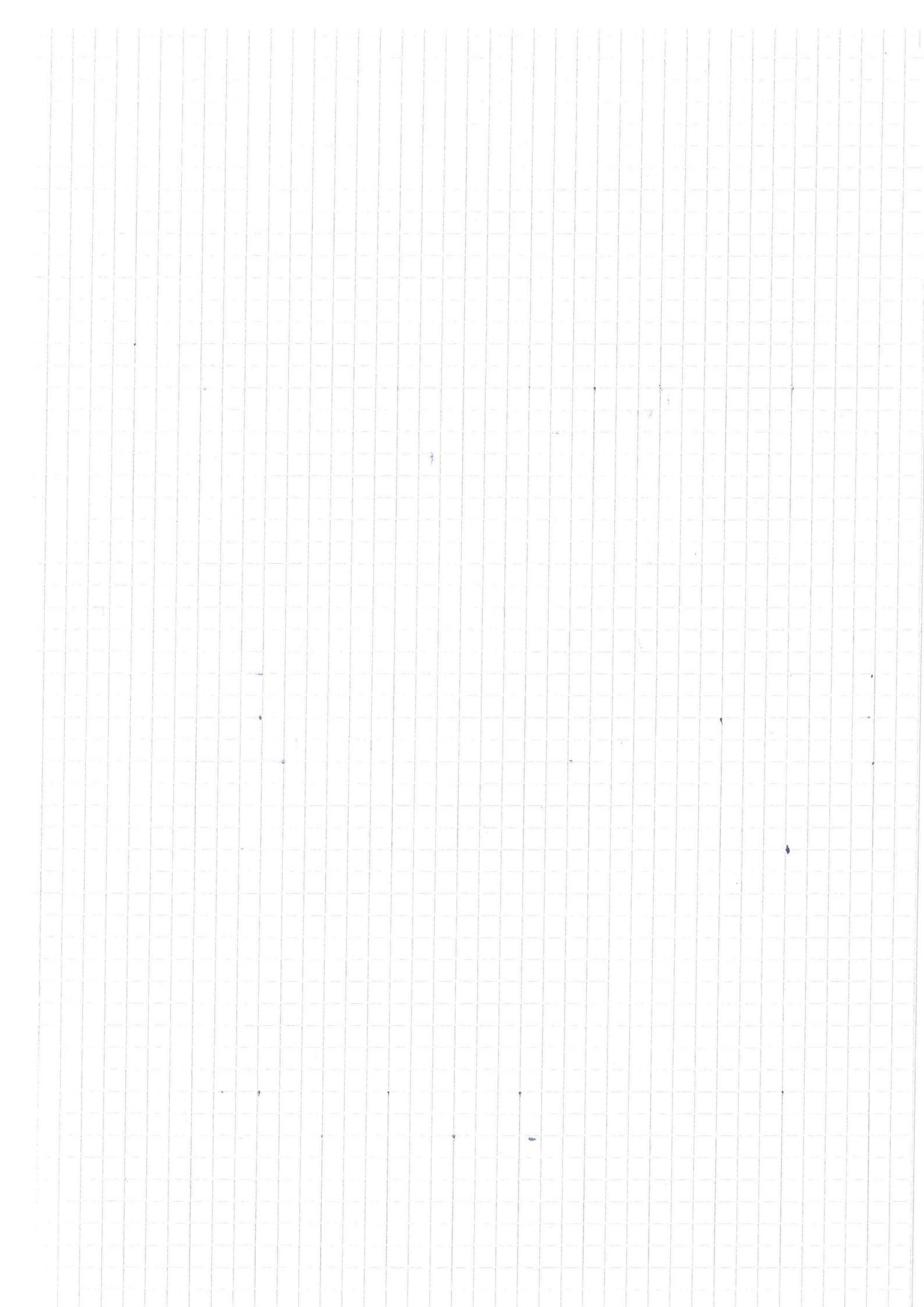
Totale afstand = 5.920.000 km.

Totale kosten = $0,002 \cdot 5920000 = 1184$ euro

Oplossing is niet uniek, want $U_A + V_4 = 0 + 400 = 400 = C_{A4}$.

Forceer (A, 4) in basis voor andere optimale oplossing.

	300		200		100		400		-800	
0	300	700	1000		500		400	800	0	
200	500	1300	900		300	1200	600		0	
800	1300		1000	1500	1100		1200	2400	0	100



Opgave 4

- i) Niet waar. Duale kan ook onbegrensd zijn.
- ii) Niet waar. Probleem is onbegrensd.
- iii) Waar
- iv) Niet waar. Bijvoorbeeld Bland's anticycling rule.

- B**
- i) niets
 - ii) $Q \in NPC$
 - iii) $P \in P$
 - iv) niets

- C** Eerst tonen we aan dat het onafhankelijkheidsprobleem (IS) behoort tot NP. Dit is waar, omdat de onafhankelijke verzameling als certificaat kan dienen. Dit is in polynomiale tijd te verifiëren.

Nu tonen we aan dat het kliekenprobleem te reduceren is naar IS.

Gegeven een instantie van het kliekenprobleem $G = (V, E)$, k .

Definieer de volgende instantie van IS:

$$G' = \bar{G} = (V, \bar{E}), \text{ waarbij } e \in \bar{E} \iff e \notin E.$$

$$k' = k.$$

Deze reductie transformeert "Ja"-instanties in "Ja"-instanties en "Nee"-instanties in "Nee"-instanties vanwege de volgende observatie.

Obs: C een klik in $G \iff C$ een onafhankelijke verzameling in $\bar{G}$.

bewijs: Laat C een klik in G zijn. Neem $u, v \in C$.

$$C \text{ klik} \Rightarrow \{u, v\} \in E \Rightarrow \{u, v\} \notin \bar{E}.$$

Dus C onafhankelijke verzameling in $\bar{G}$.

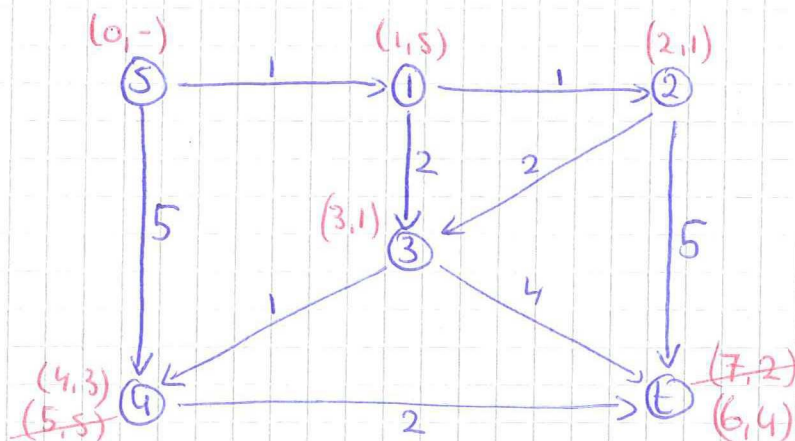
Laat C een onafh. v.z. in $\bar{G}$. Neem $u, v \in C$.

$$C \text{ onafh. v.z.} \Rightarrow \{u, v\} \notin \bar{E} \Rightarrow \{u, v\} \in E.$$

Dus C een klik in G .

Deze reductie kan in polynomiale tijd uitgevoerd worden. Dus $IS \in NPC$

Opgave 5



1. $w = \{s\}$. Label ① met (1, 5) en ④ met (5, 5)
2. $w = \{s, 1\}$. Label ② met (2, 1) en ③ met (3, 1)
3. $w = \{s, 1, 2\}$ label ⑤ met (7, 2).
label van ③ wordt niet vervangen.
4. $w = \{s, 1, 2, 3\}$ label ④ met (4, 3)
label van ⑤ wordt niet vervangen
5. $w = \{s, 1, 2, 3, 4\}$ label ⑥ met (6, 4).
6. $w = \{s, 1, 2, 3, 4, t\}$.

kortste pad = $s - 1 - 3 - 4 - t$ met kosten = 6.

Opgave 6

$$\begin{aligned}
 \min \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\
 (P) \quad 2x_1 + x_2 &\geq 15 \\
 x_1 + x_2 &\geq 10 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (D) \quad \max \quad w &= 15\pi_1 + 10\pi_2 \\
 2\pi_1 + \pi_2 &\leq 4 \\
 \pi_1 + \pi_2 &\leq 3 \\
 \pi_1, \pi_2 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

We introduceren slackvariabelen s_1 en s_2 en stellen het tableau op.

	b	π_1	π_2	s_1	s_2
-w	0	15	10	0	0
s_1	4	2	1	1	0
s_2	3	1	1	0	1
-w	-30	0	$2\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{2}$	0
π_1	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
s_2	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
-w	-35	0	0	-5	-5
π_1	1	1	0	1	-1
π_2	2	0	1	-1	2

Alle gereduceerde kosten ≤ 0
 dus optimaal.

$$\pi^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad w^* = 35.$$

b) Het duale probleem heeft alleen maar " $\leq$ "-voorwaarden, waardoor $\pi = (0, 0)$ een toegelaten basisoplossing geeft. Hierdoor hoeft niet eerst fase I van simplex uitgevoerd te worden. Dit zou wel nodig zijn voor het oplossen van de primale.

[c] Complementary slackness voorwaarden

1. $(15 - 2x_1 - x_2) \pi_1 = 0$
2. $(10 - x_1 - x_2) \pi_2 = 0$
3. $(4 - 2\pi_1 - \pi_2) x_1 = 0$
4. $(3 - \pi_1 - \pi_2) x_2 = 0$

π^* van opgave [a] invullen in 1. en 2. geeft

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 15 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 10 - x_2 \\ 20 - 2x_2 + x_2 = 15 \\ \Rightarrow x_2 = 5 \Rightarrow x_1 = 10 - 5 = 5 \end{array}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad z^* = 35$$

[d] Toevoegen $x_1 \geq 6 \Rightarrow -x_1 + s_3 = -6$
 $\Rightarrow -(5 + s_1 - s_2) + s_3 = -6$
 $\Rightarrow -s_1 + s_2 + s_3 = -1$

Invullen in tableau.

basis	$\bar{b}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$-z$	-35	0	0	1	2	0
x_1	5	1	0	-1	1	0
x_2	5	0	1	1	-2	0
s_3	-1	0	0	-1	-1	1
$-z$	-36	0	0	0	3	1
x_1	6	1	0	0	0	-1
x_2	4	0	1	0	-1	1
s_1	1	0	0	1	-1	-1

$$x^* = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$z^* = 36$$