

Tentamen Optimalisering (Delft) en Besliskunde 1 (Leiden)

10 januari 2014, 10.00-13.00 uur

Het tentamen bestaat uit 6 opgaven. Motiveer je antwoorden duidelijk. De normering van de opgaves staat steeds tussen haakjes bij de respectievelijke onderdelen. Het uiteindelijke cijfer is het totaal der punten gedeeld door 6. Het gebruik van een laptop of grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Succes!

Opgave 1 (8pt) Een particulier wil graag €20.000 beleggen. Van elke beleggingsobject kan hij inschatten wat het rendement na één jaar zal zijn. Vanwege het feit dat sommige beleggingsobjecten riskanter zijn dan andere en de particulier niet al te veel risico's wil nemen, heeft hij de volgende eisen en beperkingen.

Hij wil zijn geld in drie verschillende categorieën beleggen, namelijk aandelen, staatsobligaties en spaargeld. Het verwachte rendement (na één jaar) op aandelen is 8%, en op staatsobligaties 7.5%. De jaarlijkse rente op een spaarrekening is 2%. Omdat de particulier weinig risico wil nemen, wil hij niet meer in aandelen beleggen dan in staatsobligaties, en hooguit 4 keer zo veel geld in staatsobligaties als het bedrag dat hij op zijn spaarrekening. Daarnaast wil hij minstens €5.000 aan spaargeld hebben voor noodgevallen.

Het doel van de particulier is zijn geld op zo'n manier te beleggen dat zijn kapitaal over één jaar maximaal is. Formuleer dit probleem als een Lineair Programmeringsprobleem.

Opgave 2 (10pt) Gegeven het volgende IP:

$$\begin{array}{llllll} \min & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{o.d.v.} & 10x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\ & 5x_1 & + & 12x_2 & \geq & 15 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0, & \text{geheeltallig} & \end{array}$$

Los dit probleem op met branch-and-bound. Je mag elke gerelaxeerd deelprobleem grafisch oplossen, maar je moet wel de optimaliteit van het betreffende hoekpunt aantonen, bijv. met de “(ortho)normaaltest”.

Opgave 3 (10pt) De behoefte aan OV fietsen op vier (verhuur)locaties 1,2,3, en 4 is op een gegeven dag als volgt:

Locatie	Aantal fietsen
1	2
2	3
3	5
4	7

Om aan deze behoefte te voldoen moeten fietsen uit depots gehaald worden. Er zijn drie depots met de volgende beschikbare aantallen OV fietsen:

Depot	Aantal fietsen
1	6
2	1
3	10

De afstanden in kilometers tussen depots en locaties zijn gegeven in de volgende tabel:

Depot	Locaties			
	1	2	3	4
1	7	11	3	2
2	1	6	0	1
3	9	15	8	5

De fietsen in de depots moeten over de locaties verdeeld worden op zo'n manier dat het totale aantal te reizen kilometers minimaal is. Een medewerker beweert dat de volgende oplossing optimaal is: transporteer 3 fietsen naar locaties 2 en 3 vanuit depot 1; de fiets in depot 2 naar locatie 1; 1 fiets uit depot 3 naar locatie 1, 2 naar locatie 3 en 7 naar locatie 4. Heeft de medewerker gelijk? Motiveer. Zo niet, bepaal dan de optimale oplossing.

Opgave 4 i) (3pt) Definieer de complexiteitsklassen $\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$ en $\mathcal{NPC}$. Neem nu voor de rest van de opgave aan dat het satisfiability probleem SAT in de klasse $\mathcal{NPC}$.

ii) (2pt) Laat $P \in \mathcal{NP}$. Stel dat er is aangetoond dat $\text{SAT} \preceq P$. Tot welke klasse behoort P ? Kun je concluderen dat $P \preceq \text{SAT}$? Motiveer kort.

iii) (5pt) Laat het combinatorische optimaliseringsprobleem CO is als volgt gedefinieerd zijn:
(CO): gegeven een geheeltallige $m \times n$ matrix A , en een geheeltallige vector $b \in \mathbf{Z}^m$. Bestaat er een vector $x \in \{0, 1\}^n$ met $Ax \leq b$?

Neem aan dat de waarde van elke component x_j van een toegelaten vector x polynomiaal begrensd is in de grootte van de input.

Laat zien dat $\text{SAT} \preceq \text{CO}$.

Opgave 5 (11pt) Gegeven zij het lineaire programmeringsprobleem (P):

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{o.d.v.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

waarbij A en b geheeltallig zijn.

- i) Stel dat het probleem een optimale oplossing heeft. Is er altijd een oplossing met rationale componenten? Motiveer.
- ii) Geef nodige en voldoende voorwaarden opdat het polyhedron $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ voor elke geheeltallige b geheeltallige hoekpunten heeft. Waarom is dit een belangrijke eigenschap?

Gegeven is de volgende matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- iii) Heeft het probleem (P) met deze keuze van A en geheeltallige b altijd een geheeltallige optimale oplossing (mits het een optimale oplossing heeft)? Motiveer.
- iv) Als een LP-probleem niet-toegelaten is, wat weet je dan over het bijbehorende duale probleem?

Opgave 6 Beschouw het probleem (P) uit de vorige opgave, en de daarin gespecificeerde matrix

A . Laat nu $c = (0, 1, 1, 1)^T$ en $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. De vector $x = (0, 2, 0, 1)$ is een basis toegelaten oplossing met basisvariabelen $x_1 = 0, x_2 = 2, x_4 = 1$.

- i) **(2pt)** Stel het duale probleem op.
- ii) **(4pt)** Bewijs dat het simplextableau behorend bij x gegeven is door:

<i>basis</i>	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	-3	0	0	1	0
x_1	0	1		0	
x_2	2		1	1	
x_4	1			-1	1

Hierbij mag je gebruik maken van:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- iii) **(3pt)** Los het probleem met de simplexmethode op.
- iv) **(2pt)** Bepaal m.b.v. “complementary slackness” oftewel de orthogonaliteitsrelaties, de optimale oplossing van het duale probleem. Als je (iii) niet hebt kunnen oplossen, bepaal dan de duale (in dit geval niet-toegelaten) oplossing bij x m.b.v. de orthogonaliteitsrelaties.