naam *name*	
studienummer *student number*	
vak *course*	
code *code*	datum *date*
opleiding *program*	
aantal ingeleverde vellen *total number of sheets*	opgave nummer *question number*

TU Delft

Technische Universiteit Delft

Tentamen Optimaliseren
10 januari 2014

Uitwerking niet overal volledig!

1. x_1 = euro's belegd in aandelen
x_2 = euro's belegd in staatsobligaties
x_3 = euro's belegd in spaargeld.

$$\max \quad 1{,}08x_1 + 1{,}075x_2 + 1{,}02x_3$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_2 - 4x_3 \leq 0$$

$$x_3 \geq 5.000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20.000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2. min $2x_1 + x_2$

odv $10x_1 + 6x_2 \leq 15$

$5x_1 + 12x_2 \geq 15$

$x_1, x_2 \geq 0$, geheeltallig.

$P_0 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/4 \end{bmatrix}$, $z = 5/4$

$L := \{P_1, P_2\}$ met $P_1 = P_0 + \{x_2 \leq 1\}$
$P_2 = P_0 + \{x_2 \geq 2\}$.

$P_1 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $z = 2\,1/5$

$L := \{P_2, P_3, P_4\}$ met $P_3 = P_1 + \{x_1 \leq 0\}$
$P_4 = P_1 + \{x_1 \geq 1\}$

$P_2 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $z = 2 \Rightarrow \bar{z} = 2$

Omdat $z^{P_1} > \bar{z}$ kunnen we P_3 en P_4 afsnijden.

Dus hebben we een optimale oplossing gevonden.

$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $z^* = 2$.

3. Gebruik startoplossing van de medewerker.

	2		3		5		7		
6	7		11	3 −	3	3 +	2		0
1	1	1	6		0		1		−3
10	9	1	15	+	8	2 −	5	7	5
	4		11		3		0		

Niet optimaal, want voor depot 3 en locatie 2 geldt
$5 + 11 \not\leq 15$.

	5		11		3		1	
0	7		11	1	3	5	2	
−4	1	1 −	6	+	0		1	
4	9	1 +	15	2 −	8		5	7

Niet optimaal, want voor depot 2 en locatie 2 geldt
$11 + (-4) \not\leq 6$.

	5		11		3		1	
0	7		11	1	3	5	2	
−5	1		6	1	0		1	
4	9	2	15	1	8		5	7

Voor alle takken geldt $u_i + v_j \leq c_{ij}$. Dus optimaal.

Dus: depot 1 → locatie 2 = 1
depot 1 → locatie 3 = 5
depot 2 → locatie 2 = 1
depot 3 → locatie 1 = 2
depot 3 → locatie 2 = 1
depot 3 → locatie 4 = 7

4 a P = verzameling problemen die in polynomiale tijd oplosbaar zijn.

NP = verzameling problemen die in polynomiale tijd verifieerbaar zijn

NPC = verzameling problemen in NP waarvoor geldt dat ieder ieder probleem in NP in polynomiale tijd te reduceren is tot dit probleem.

b We kunnen concluderen dat $P \in NPC$, omdat $P \in NP$ en elk probleem kan, via SAT, in polynomiale tijd gereduceerd worden tot P.

Omdat ~~P SAT~~ $\in NP$, kunnen we concluderen dat $P \leq SAT$.

c. Gegeven een instantie van SAT met variabelen $x_1, \dots, x_n$ en clauses $C_1, \dots, C_m$. Laat C_i^+ de verzameling variabelen zijn die positief voorkomen in C_i en C^{-} de verzameling variabelen die negatief voorkomt.

We definieren nu de volgende ~~voorwaarden~~ variabelen

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{als variabele } x_j \text{ "waar" is} \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, n.$$

We hebben nu de volgende voorwaarden

$$\sum_{j \in C_i^+} y_j + \sum_{j \in C_i^-} (1 - y_j) \geq 1 \qquad i = 1, \dots m$$

Deze voorwaarden kunnen we eenvoudig herschrijven als $Ax \leq b$. Dit geeft ons een instantie voor CO.

Er geldt dat een toegelaten oplossing precies correspondeert met een truth assignment f voor SAT.

naam *name*			
studienummer *student number*			
vak *course*			
code *code*		datum *date*	
opleiding *program*			
aantal ingeleverde vellen *total number of sheets*		opgave nummer *question number*	

TU Delft

Technische Universiteit Delft

5 a. LP kan worden opgelost met behulp van het simplex algoritme. Hierin blijven de elementen in het tableau altijd Rationaal, wanneer de input Rationaal is. Dit is waar omdat in het simplex algoritme alleen opgeteld, afgetrokken vermenigvuldigd en gedeeld wordt.

Dus, er is altijd een oplossing (mits er een optimale oplossing bestaat) met Rationale componenten.

b. Unimodulariteit van de matrix A is een voldoende en een noodzakelijke voorwaarde.

Dit is een belangrijke eigenschap omdat IP over deze polyhedron opgelost kan worden met behulp van LP, omdat de optimale oplossing van de LP relaxatie geheeltallig is

c. Ja, want elke ~~max~~ 3x3 submatrix van A heeft determinant −1, 0, 1. Dus A is unimodular.

d. Niet-toegelaten of onbegrensd.

In de Onderwijs- en examenregeling is vastgelegd dat tentamenuitslagen binnen 20 werkdagen zullen worden gepubliceerd.
The Education and Examination regulations stipulate that examination results will be made known within 20 working days.

6 a

$$\min \quad 2\pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3$$

$$\begin{aligned} 2\pi_1 + \pi_2 - 2\pi_3 &\geq 0 \\ \pi_1 + \pi_2 &\geq 1 \\ \pi_1 - \pi_3 &\geq 1 \\ \pi_2 + \pi_3 &\geq 1 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b Er moet gelden $B x_B + N x_n = b$ voor de basis met x_1, x_2 en x_4.

Dit geeft: $x_B + B^{-1} N x_n = B^{-1} b$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dit komt precies overeen met de kolommen in het gegeven tableau.

c.

	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	-3	0	0	1	0
x_1	0	1			
x_2	2		1	1	
x_4	1			-1	1

	$\bar{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4
	-5	0	-1	0	0
x_1	0	1			
x_3	2		1	1	
x_4	3		1		1

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad z^* = 5$$

Optimaal, want $\bar{c}_j \leq 0 \ \forall j$.

d. $x_{3} \neq 0 \Rightarrow \pi_1 - \pi_3 = 1 \qquad (\pi_1 = 1 + \pi_3)$

$x_4 \neq 0 \Rightarrow \pi_2 + \pi_3 = 1 \qquad (\pi_2 = -\pi_3 + 1)$

verder geldt $w^* = z^* \Rightarrow 2\pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 = 5$

En $2\pi_1 + \pi_2 - 2\pi_3 \geq 0 \Rightarrow 2 + 2\pi_3 + 1 - \pi_3 - 2\pi_3 \geq 0$

$\Rightarrow \pi_3 \leq 3.$

Dus duale optimum:

$$\begin{pmatrix} \pi_1^* \\ \pi_2^* \\ \pi_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \pi_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{VOOR } \pi_3 \leq 3.$$