

1. Maak de volgende definities af.

- (3) a. Een functie  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heeft een (geïsoleerde) *singulariteit* in  $a$  als ...
- (3) b. Een functiereeks  $\sum_n f_n$  is *normaal convergent* op een gebied  $D$  als ...
- (3) c. De *hoofdwaarde van het argument* van een complex getal is ...
- (3) d. De *orde van een niet-essentiële singulariteit*  $a$  van een analytische functie  $f$  is ...

(10) 2. Formuleer het Lemma van Schwarz voor analytische functies op de eenheidsschijf  $\mathbb{E}$ , inclusief de conclusie als ergens gelijkheid optreedt.

(9) 3. Zij  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  een analytische functie, met  $D$  een gebied. Bewijs dat de niveaokrommen van de reële en imaginaire delen van  $f$  elkaar loodrecht snijden.

(9) 4. Zij  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  een analytische functie. Neem aan dat er een positief getal  $M$  bestaat zó dat

$$|f(z)| \leq M \cdot |z| \cdot \ln|z|$$

als  $|z| \geq 10$ . Bewijs dat er constanten  $\alpha$  en  $\beta$  zijn zó dat  $f(z) = \alpha + \beta z$ .

(15) 5. Bereken de integraal

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

Motiveer alle stappen in je berekening.

(10) 6. Laat zien dat er precies twee analytische functies op  $U_1(0)$  bestaan met de eigenschap dat

$$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \frac{n+1}{n}$$

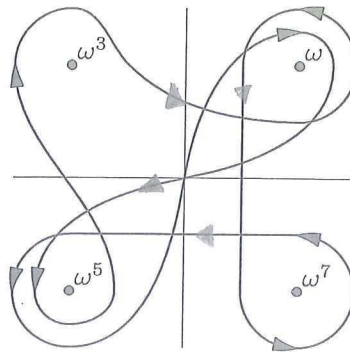
voor alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(6) 7. Bepaal het aantal oplossingen van de vergelijking  $\exp(z) = 3z$  op de eenheidsschijf.

(9) 8. Bepaal de eerste drie termen ongelijk aan nul van de Laurentreeks van  $\cotan z$  rond 0.  
NB  $\cotan z = (\cos z)/(\sin z)$ .

Zie ook de volgende bladzijde.

9. Gegeven een kromme  $\alpha$  met de onderstaande beeldverzameling, die éénmaal doorlopen wordt



NB  $\omega = \exp(\frac{\pi i}{4})$ .

- (4) a. Bepaal van de vier aangegeven punten het windgetal van  $\alpha$  ten opzichte van dat punt.  
 (6) b. Bereken

$$\oint_{\alpha} \frac{1}{\zeta^4 + 1} d\zeta$$

---

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$

en op de gebruikelijke wijze afgerond.

EINDE