

1. Maak de volgende definities af.

- (3) a. Een functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ is *differentieerbaar* in $a \in D$ als ...
- (3) b. Een functie is *harmonisch* op een gebied D als ...
- (3) c. Een *essentiële singulariteit* van een analytische functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ is ...
- (3) d. Een functie is *meromorf* op $\mathbb{C}$ als ...

(10) 2. Formuleer het Maximum-Modulusprincipe

- (10) 3. Zij $D = \{z : |z| < 4\}$ en zij $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch en zó dat $|f(z)| \leq \sqrt{|z|}$ voor alle $z \in D$. Toon aan: $f(0) = 0$ en $|f(z)| \leq \frac{1}{2}|z|$ voor alle $z \in D$.

(15) 4. Bereken de integraal

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^6 + 1} dx$$

Motiveer alle stappen in je berekening. *Aanwijzing:* Denk aan een taartpunt met tophoek $\frac{1}{3}\pi$.

- (10) 5. De analytische functies f en g , gedefinieerd door $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ en $g(z) = z \sin \frac{1}{z}$ zijn analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en voldoen aan $f(\frac{1}{n\pi}) = g(\frac{1}{n\pi}) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Waarom is dit niet in strijd met de uniciteitsstelling voor analytische functies?

(15) 6. De functie f is op zijn natuurlijke definitiegebied gegeven door

$$f(z) = \frac{(z^2 + 1)(z - i)}{\sinh \pi z}$$

Bepaal van iedere singulariteit van f in $U_3(i)$ de aard en de orde.

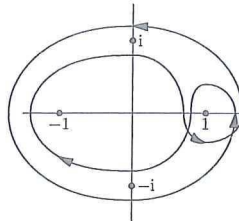
7. Bepaal van de functie

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$$

de Laurentreeks

- (3) a. in de ring $\{z : |z| > 1\}$
- (5) b. in de ring $\{z : 0 < |z + 1| < 2\}$

8. Gegeven een kromme α met de onderstaande beeldverzameling, die éénmaal doorlopen wordt



- (4) a. Bepaal van de vier aangegeven punten het windgetal van α ten opzichte van dat punt.

Vervolg van deze opgave op de volgende bladzijde.

(6) b. Bereken

$$\oint_{\alpha} \frac{1}{(\zeta^2 + 1)(\zeta^2 - 1)} d\zeta$$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$

en op de gebruikelijke wijze afgerond.

EINDE