

1. Maak de volgende definities af.

- (3) a. Een functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ is *analytisch* in $a \in D$ als ...
- (3) b. Een *gehele* functie is een functie die ...
- (3) c. Een *pool* van een analytische functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ is ...
- (3) d. Het *residu* van een analytische functie f in een punt a is ...

(10) 2. Formuleer de karakterisering van complexe differentieerbaarheid met behulp van de Cauchy-Riemann-vergelijkingen.

3. Zij $\mathbb{E} = \{z : |z| < 1\}$ de eenheidsschijf en zij $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch en zó dat $|f(z)| \leq 1$ voor alle z . Neem aan dat $f(0) = f'(0) = 0$.

(6) a. Toon aan: $|f(z)| \leq |z|^2$ voor alle $z \in \mathbb{E}$.

(6) b. Toon aan: als er een $a \in \mathbb{E}$ is met $|f(a)| = |a|^2$ dan is er een $\xi \in \mathbb{C}$ met $|\xi| = 1$ en $f(z) = \xi z^2$ voor alle $z \in \mathbb{E}$.

4. Voor $k \in \mathbb{N}$ laat α_k de rand van het vierkant met hoekpunten $k\pi(1+i)$, $k\pi(-1+i)$, $k\pi(-1-i)$, en $k\pi(1-i)$ zijn. Zij $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ en } \cos z \neq 0\}$ en definieer $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$f(z) = \frac{\tan z}{z^2}$$

(5) a. Toon aan dat $|\tan z| \leq 2$ op α_k (voor alle k).

(4) b. Toon aan

$$\left| \int_{\alpha_k} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{16}{\pi k}$$

(8) c. Bereken

$$\int_{\alpha_k} f(\zeta) d\zeta$$

voor elke k .

(4) d. Toon nu aan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(10) 5. Bestaat er een analytische functie f op $U_2(0)$ met de eigenschap dat

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{1-2n}$$

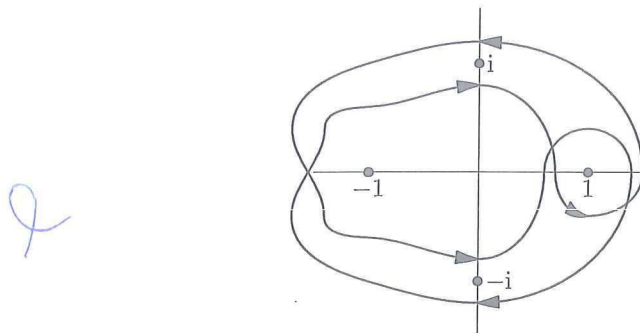
voor alle $n \in \mathbb{N}$? Zo ja, geef alle functies met die eigenschap. Zo nee, geef aan waarom zo'n f niet bestaat.

Zie ook de volgende bladzijde.

6. We bekijken de vergelijking $z^7 - 5z^5 + 15z - 1 = 0$. Bepaal het aantal oplossingen van de vergelijking

- (5) a. In de ring $\{z : 2 < |z| < 3\}$
 (5) b. In de ring $\{z : 1 < |z| < 2\}$
 (5) c. In de ring $\{z : 3 < |z|\}$

7. Gegeven een kromme α met de onderstaande beeldverzameling, die éénmaal doorlopen wordt



- (4) a. Bepaal van de vier aangegeven punten het windgetal van α ten opzichte van dat punt.
 (6) b. Bereken

$$\oint_{\alpha} \frac{1}{(\zeta^2 + 1)(\zeta^2 - 1)} d\zeta$$

(Handwritten blue symbol, similar to the one in the previous figure)

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$

en op de gebruikelijke wijze afgerond.

EINDE