
Complexe Functietheorie (tw2040) — 2014/15

Tentamen — 23 januari 2015

Er zijn in totaal 38 punten beschikbaar. 36 punten zijn 100%.

Alle antwoorden, beweringen en berekeningen dienen duidelijk beredeneerd te worden.

Opgave 1 Maak de volgende definities af:

(4)

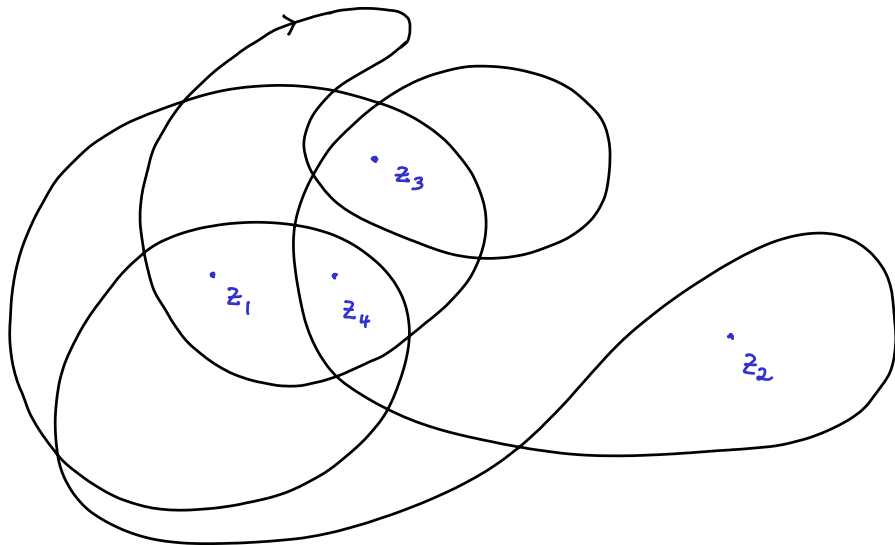
- a) Een functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ is *holomorfe* als ...
- b) De convergentiestraal R van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is ...
(Hier mag je één van de gebruikelijke equivalente definities geven.)
- c) Een verzameling $D \subseteq \mathbb{C}$ is een *gebied*, als ...
- d) Het *windingsgetal* van een gesloten pad γ ten opzichte van een punt $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ is ...

Opgave 2 Formuleer de stelling van Morera.

(2)

Opgave 3 Laat het beeld van α de geörienteerde contour in de onderstaande figuur zijn (één keer doorlopen). Bepaal $\chi(\alpha; z_j)$ voor $j = 1, 2, 3, 4$. [Geen uitleg nodig.]

(2)



Opgave 4 Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven is door

(4)

$$f(z) = \frac{(z+3)^2(z-1)}{1 - \sin(\pi z/2)}.$$

Bepaal voor iedere singulariteit van f in $B(1, 5)$ het type van de betreffende singulariteit. Bereken $f(a)$ als a ophefbaar is. Vermeld bij iedere pool ook de (pool)orde. (Licht je antwoorden kort toe.)

- (6) **Opgave 5** Beantwoord de volgende vragen en beredeneer kort je antwoorden.
- 1) Is de formule $\text{Log}(z^2) = 2 \text{Log}(z)$ geldig voor alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$?
 - 2) Is een holomorfe functie f op een open verzameling $D \subseteq \mathbb{C}$ noodzakelijk constant op D als $f' = 0$ op D geldt?
 - 3) Heeft elke reëel totaal differentieerbare functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ een complexe primitieve?
 - 4) Is elke holomorfe en begrensde functie op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ constant?

- (4) **Opgave 6** Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven is door

$$f(z) = \frac{\cos z}{z \sin z}.$$

- a) Laat zien dat er rond $z = 0$ een holomorfe functie h bestaat zodanig dat $h(0) = h'(0) = 0$ en

$$z^2 f(z) = \frac{\cos z}{1 + h(z)}.$$

- b) Bereken $\int_{\partial B(0,1)} \frac{\cos z}{z \sin z} dz$.

- (4) **Opgave 7** Bepaal de Laurentreeks van $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 + 1}$ voor $0 < |z| < 1$.

- (8) **Opgave 8** Toon, voor $\lambda > 0$, aan dat

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(\sqrt{2}\lambda x)}{1 + x^4} dx = \frac{-\pi}{2} e^{-\lambda} \sin\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right)$$

[Een ander uiterlijk van de waarde is $\frac{-\pi e^{-\lambda}}{\sqrt{8}}(\sin \lambda - \cos \lambda)$, daar mag je ook op uitkomen.]

- (4) **Opgave 9** Bestaat een holomorfe functie f op $B(0, 2)$ zodanig dat

$$f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{n(-1)^n}{1+n^2}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$? Beredeneer je antwoord.