
Analyse 4 (tw2040) — 2013/14

Hertentamen — 14 maart 2014

Er zijn in totaal 38 punten beschikbaar. 36 punten zijn 100%.

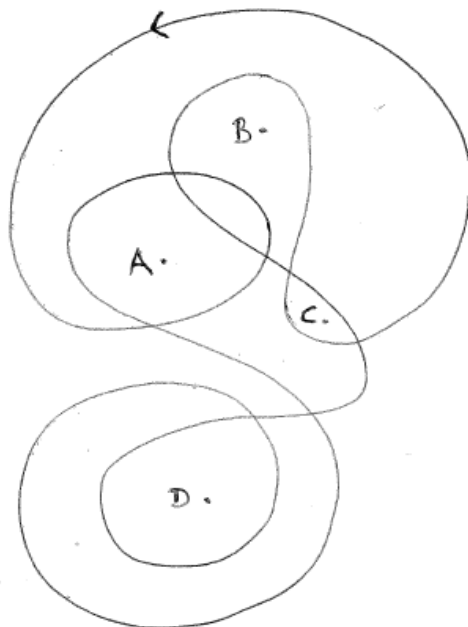
Alle antwoorden, beweringen en berekeningen dienen duidelijk beredeneerd te worden.

Opgave 1 Laat $D \subseteq \mathbb{C}$ een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn. Noem 4 onderling verschillende mogelijkheden om na te gaan of een functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf op D is. [Let op volledigheid en nauwkeurigheid.] (4)

Opgave 2 Welke van de volgende uitspraken is waar, welke is niet waar? [Geen uitleg nodig.] (4)

- 1) De functie $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{2+z^2}$ is geheel.
- 2) Elke holomorfe functie op $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2 \text{ en } |z - 1| > 1\}$ heeft een primitieve op D .
- 3) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^5} = 0$ voor *elk* gesloten pad in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- 4) Twee gehele functies die in oneindig veel punten gelijk aan elkaar zijn, zijn overal gelijk aan elkaar.

Opgave 3 Laat het beeld van α de geörienteerde contour in de onderstaande figuur zijn (één keer doorlopen). Bepaal $\chi(\alpha; P)$ voor $P = A, B, C, D$. [Geen uitleg nodig.] (2)



Zie ommezijde

(3) **Opgave 4** Bereken $\int_{\partial B(0,2)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n dz$ voor $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

(3) **Opgave 5** Bereken $\int_{\partial B(0,2)} e^{1/z} dz$.

(8) **Opgave 6** Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven is door

$$f(z) = \frac{z(z+1)^2}{\sin^2(\pi z)}.$$

- Bepaal de geïsoleerde singulariteiten van f en hun type. Vermeld bij iedere pool ook de (pool)orde. Licht je antwoorden kort toe.
- Toon aan dat er rond elke $n \in \mathbb{Z}$ een holomorfe functie h bestaat met $h(n) = h'(n) = 0$ en $(z-n)^2 f(z) = \frac{z(z+1)^2}{\pi^2 + h(z)}$.
[Stel de bewerking even uit als het te lastig lijkt.]
- Bereken $\text{Res}(f, n)$ in afhankelijkheid van $n \in \mathbb{Z}$.
[Hint: gebruik onderdeel b).]

(4) **Opgave 7** Bereken de Laurentreeks van $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2-1}$ voor $0 < |z| < 1$.

(6) **Opgave 8** Laat zien dat

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Gebruik de “Grote O”-notatie voor de termen die bij de limietovergang wegvallen.

[Een ander uiterlijk van de waarde is $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} (\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}))$, daar mag je dus ook op uitkomen.]

(4) **Opgave 9** Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn als $f(x) := \arctan(x)$. Heeft f in het punt $a := -3$ een machtreeksontwikkeling? En zo ja, welke convergentiestraal heeft deze machtreeks? [Hint: Bekijk eerst f' .]