

Analyse 4 (tw2040) — 2013/14

Deeltentamen 2 — 24 januari 2014

Er zijn in totaal 38 punten beschikbaar. 36 punten zijn 100%.

Alle antwoorden, beweringen en berekeningen dienen duidelijk beredeneerd te worden.

✓ **Opgave 1** Maak de volgende definities af:

(4)

- Een functie f is *geheel* als ...
- Een verzameling $D \subseteq \mathbb{C}$ is *samenhangend* als ...
- De *convergentiestraal* van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is ...
- Een verzameling $D \subseteq \mathbb{C}$ is *stervormig*, als ...

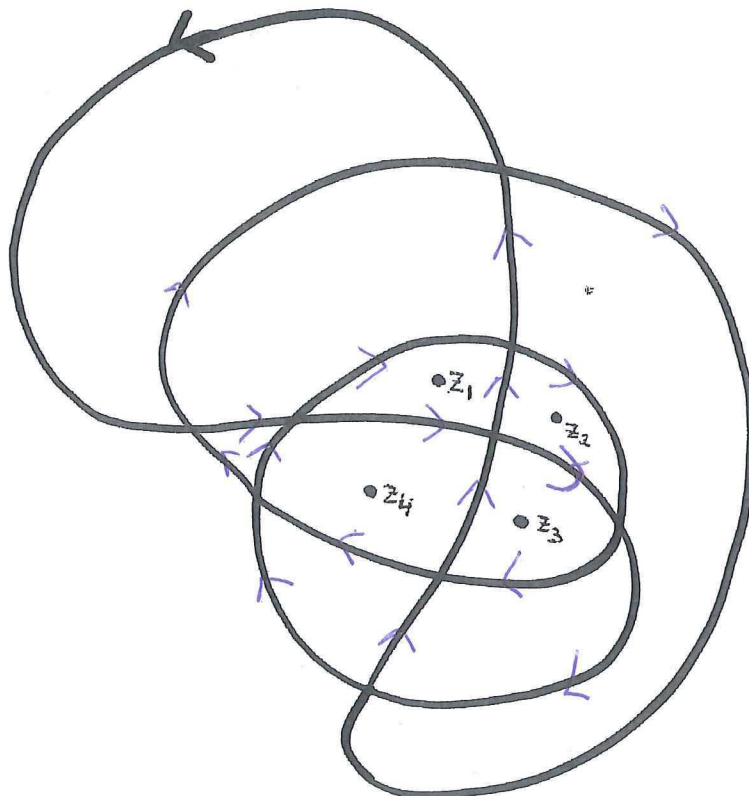
✓ **Opgave 2** Welke van de volgende uitspraken is waar, welke is niet waar?
[Geen uitleg nodig.]

(4)

- De functie $f(z) = \bar{z}^3$ is geheel.
- De functie $f(z) = 1/z$ heeft op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ geen primitieve.
- De verzameling $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ is enkelvoudig samenhangend.
- Elke gehele en begrensde functie is constant.

✓ **Opgave 3** Laat het beeld van α de geörienteerde contour in de onderstaande figuur zijn (één keer doorlopen). Bepaal $\chi(\alpha; z_j)$ voor $j = 1, 2, 3, 4$. [Geen uitleg nodig.]

(2)



(4) **Opgave 4** Bereken $\int_{\partial B(0,2)} \left(\frac{e^z}{z-1}\right)^n dz$ in afhankelijkheid van $n \in \mathbb{N}$.

(4) **Opgave 5** Beschouw de functie f die, op zijn natuurlijke definitiegebied in het complexe vlak, gegeven is door

$$f(z) = \frac{(z+2)^2(z-2)}{1 - \cos(\pi z)}.$$

Bepaal voor iedere singulariteit van f in $B(0,3)$ het type van de betreffende singulariteit. Vermeld bij iedere pool ook de (pool)orde. Licht je antwoorden kort toe.

(4) **Opgave 6** Bereken de Laurentreeks van de functie $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$ voor $|z| > 1$.

(8) **Opgave 7** Bereken

$$X := \int_0^\infty \frac{x \ln x}{1+x^3} dx.$$

Gebruik de "Grote O"-notatie voor de termen die bij de limietovergang wegvallen.

(4) **Opgave 8** Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn als $f(x) := \ln(1+|x|)$. Heeft f in het punt $a := -2$ een machtreeksontwikkeling? En zo ja, welke convergentiestraal heeft deze machtreeks?

(4) **Opgave 9** Zij $f : B(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf en neem aan dat $g(z) := \overline{f(z)}$ ook holomorf is. Toon aan dat dan f constant moet zijn.