
Complexe Functietheorie (tw2040) — 2013/14

Deeltentamen 1 — 5 november 2013

Er zijn in totaal 38 punten beschikbaar. 36 punten zijn 100%.

Alle antwoorden, beweringen en berekeningen dienen duidelijk beredeneerd te worden. Indien een stelling wordt toegepast dient duidelijk gemotiveerd te worden hoezo aan de voorwaarden van de betreffende stelling is voldaan.

Opgave 1 a) Bepaal alle oplossingen $z \in \mathbb{C}$ (in standaardvorm) van de vergelijking (6)

$$(1 - z)^4 = (2 + z)^4.$$

b) Bepaal voor $\omega \geq 0$ de waarde van

$$\max \{ |e^{-z^2}| \mid z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} z| \leq \omega \}.$$

Opgave 2 Zij $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf. Toon aan: als het beeld van f op de cirkel $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 5| = 3\}$ ligt, dan is f constant. (4)

Opgave 3 Bereken de volgende padintegralen: (8)

$$(a) \int_{\partial B(0,2)} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n dz \quad (b) \int_{\partial \Delta} \frac{\sin(\pi z)}{1 - 2z^2 + z^4} dz$$

waarbij $n \in \mathbb{N}$ en Δ de driehoek met hoekpunten $\pm(1 - i)$ en 2 is.

Zie ommezijde

(8)

Opgave 4 Geef (zonder nadere uitleg) voorbeelden voor de volgende situaties:

- Een open deelverzameling $D \subseteq \mathbb{C}$ die niet samenhangend is.
- Een open deelverzameling $D \subseteq \mathbb{C}$ die samenhangend maar niet enkelvoudig samenhangend is.
- Een open deelverzameling $D \subseteq \mathbb{C}$ en een holomorfe functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ die geen primitieve op D heeft.
- Een continue functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die op geen bol een primitieve heeft.
- Een open deelverzameling $D \subseteq \mathbb{C}$ en een niet-constante holomorfe functie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ met $f'(z) = 0$ voor alle $z \in D$.

(12)

Opgave 5 Laat zien dat

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx := \lim_{\substack{r \nearrow \infty \\ \epsilon \searrow 0}} \int_\epsilon^r \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

door de volgende stappen te volgen:

- Integreer, voor $0 < \epsilon < r$, de functie $f(z) := \frac{e^{iz}-1}{z}$ over de rand van de verzameling $D_{\epsilon,r} := \{se^{it} \mid \epsilon \leq s \leq r, t \in [0, \pi]\}$ (één keer rond in positive oriëntatie). Wat is de waarde van deze integraal, en waarom?
- Laat $\gamma_r(t) := re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Toon aan dat

$$\lim_{r \searrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{r \nearrow \infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

(Je mag gebruiken dat $\lim_{r \nearrow \infty} \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt = 0$ is.)

- Combineer de resultaten van a) en b) om het bewijs af te sluiten.