

Tentamen Gewone differentiaalvergelijkingen, TW2030
Woensdag 15 maart 2017, 9.00-12.00 u

- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
- Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
- Normering: 36 punten zijn in totaal te behalen; de puntenverdeling is zoals aangegeven in de opgaven.

-
1. (4) De differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ wordt gegeven door

$$y' + 2y = e^{3x} - H_1(x)e^{-x},$$

met als beginvoorwaarde $y(0) = 1$ en met $H_1(x)$ de Heaviside stapfunctie met een stap in $x = 1$.

Bepaal de oplossing van het bovenstaande beginwaardeprobleem.

2. Beschouw de differentiaalvergelijking voor de functie $y = y(x)$:

$$x^2 y'' + 3xy' - (3 + x^2)y = 0.$$

- a. (1) Geef de singuliere punten van deze vergelijking en geef aan of het regulier dan wel irregulier singuliere punten betreft.
- b. (2) Geef de indiciele vergelijking en laat zien dat $r = 1$ en $r = -3$ oplossingen zijn van deze vergelijking.
- c. (2) Zoek een machtreeks oplossing $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ door de recurrente betrekking voor a_n op te stellen en geef aan voor welke n de betrekking geldig is. Je hoeft de recurrente betrekking niet op te lossen!
- d. (1) Wat is de convergentiestraal van de machtreeks die correspondeert met de recurrente betrekking gevonden in (c)?

3. We bekijken de volgende matrixdifferentiaalvergelijking voor de functie $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$:

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x},$$

met matrix A gedefinieerd door

$$A = \begin{pmatrix} +2 & -1 & 0 \\ 0 & +2 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a. (5) Bereken e^{At} en geef de oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}$ met $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.
- b. (3) Bepaal een particuliere oplossing van het inhomogene probleem

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t.$$

4. Gegeven is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t), y(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ye^{-x^2/2}, \\ \frac{dy}{dt} = x(4 - e^{x^2/2}). \end{cases}$$

- a. (2) Vind alle evenwichtspunten.
- b. (2) Karakteriseer de evenwichtspunten en bepaal de stabiliteit (asymptotisch stabiel, stabiel, instabiel) van het gelineariseerde systeem voor elk van de evenwichtspunten.
- c. (2) Bepaal (indien mogelijk) de stabiliteit van de evenwichtspunten voor het *niet-lineaire* stelsel en beargumenteer je antwoord.
- d. (4) Toon aan dat het stelsel oneindig veel periodieke oplossingen bevat en bepaal de verzameling van beginvoorwaarden $\mathcal{B} = \{(x_0, y_0)\}$, die correspondeert met een periodieke oplossing.
- e. (3) Schets het faseportret.

5. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking voor de C^1 functies $y(t)$ voor $t > 0$:

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = y_0.$$

- a. (3) Bepaal voor welke waarden van y_0 bovenstaand beginwaardeprobleem een unieke oplossing heeft en motiveer uw antwoord.
- b. (2) Geef de oplossingen van bovenstaand beginwaardeprobleem voor die waarden van y_0 die tot een unieke oplossing leiden.

- inleiding

- The basic model
1.1 begin setting

Happydynam 469

Happy average 99.9

iterations 74.780

Happy0.5

types 5

grid 144

pop 120