

Tentamen Gewone differentiaalvergelijkingen, TW2030
Vrijdag 3 februari 2017, 13.30-16.30 u

- Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 38 punten zijn in totaal te behalen; de puntenverdeling is zoals aangegeven in de opgaven.
-

1. (4) De differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$ wordt gegeven door

$$y'' + 4y = \sin t - H_{2\pi}(t) \cos t,$$

met als beginvoorwaarden $y(0) = y'(0) = 0$ en $H_{2\pi}(t)$ de Heaviside stapfunctie met een stap in $t = 2\pi$.

Bepaal de oplossing van het bovenstaande beginwaardeprobleem.

2. Beschouw de differentiaalvergelijking voor de functie $y = y(x)$:

$$xy'' + 3y' - 3y = 0.$$

- a. (1) Geef de singuliere punten van deze vergelijking en geef aan of het regulier dan wel irregulier singuliere punten betreft.
 - b. (2) Geef de indiciele vergelijking en laat zien dat $r = 0$ en $r = -2$ oplossingen zijn van deze vergelijking.
 - c. (2) Zoek een machtreeks oplossing $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ door de recurrente betrekking voor a_n op te stellen. Je hoeft de recurrente betrekking niet op te lossen!
3. We bekijken de volgende matrixdifferentiaalvergelijking voor de functie $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$:

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x},$$

met matrix A gedefinieerd door

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a. (5) Bereken e^{At} en geef de oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}$ met $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.
- b. (3) Bepaal een particuliere oplossing van het inhomogene probleem

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t.$$

4. Gegeven is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t), y(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 10y + 2xy, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - y^2. \end{cases}$$

- a. (2) Vind alle evenwichtspunten.
- b. (2) Karakteriseer de evenwichtspunten en bepaal de stabiliteit (asymptotisch stabiel, stabiel, instabiel) van het gelineariseerde systeem voor elk van de evenwichtspunten.
- c. (2) Bepaal (indien mogelijk) de stabiliteit van de evenwichtspunten voor het *niet-lineaire* stelsel en beargumenteer je antwoord.

5. Gegeven is de differentiaalvergelijking voor de functie $z(t)$:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{dz}{dt} + z = 0.$$

- a. (2) Toon aan dat bovenstaande tweede-orde differentiaalvergelijking equivalent is met het stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + xy. \end{cases}$$

- b. (2) Laat zien dat $y = 1$ een invariante verzameling is, d.w.z. als $y(t_1) = 1$ voor zekere $t_1 \in \mathbb{R}$, dat dan voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt dat $y(t) = 1$.
- c. (3) Toon aan dat het stelsel oneindig veel periodieke oplossingen bevat.
- d. (3) Schets het faseportret.

6. Beschouw de volgende matrixdifferentiaalvergelijkingen voor de n -dimensionale vectorwaardige functies $\mathbf{x}(t)$ en $\mathbf{y}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{y} = -\mathbf{A}(t) \mathbf{y}.$$

Laat $\mathbf{A}(t)$ een continue tijdsafhankelijke $n \times n$ matrix zijn.

- a. (2) Bewijs dat in het geval $n = 1$ het product van de oplossingen $x(t)y(t)$ constant is.
- b. (3) Definieer nu $z(t) = \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t)$, met $\cdot$ het gebruikelijke Euclidische inproduct. Geldt in dit geval dat $z(t)$ constant is? Zo ja, geef een bewijs; zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

TABEL met LAPLACE TRANSFORMATIES

	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
5	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
7	te^{at}	$\frac{1}{(s - a)^2}$
8	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
9	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$
10	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$
11	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
12	$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
13	$\delta(t)$	1
14	$\delta(t - c)$	e^{-cs}
15	$e^{ct} f(t)$	$F(s - c)$
16	$H_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$
17	$H_c(t) f(t - c)$	$e^{-cs} F(s)$
18	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
19	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
20	$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$	$F(s) G(s)$