

Tentamen Gewone differentiaalvergelijking, TW2030
Vrijdag 29 januari 2016, 13.30-16.30 u

- Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 36 punten zijn in totaal te behalen + 3 BONUSPUNTEN; de puntenverdeling is zoals aangegeven in de opgaven.
-

1. (4) De differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$ wordt gegeven door

$$2y''' + y'' + 2y' + y = \sin t.$$

Geef de algemene oplossing $y(t)$.

2. (5) Bepaal met behulp van Laplace transformaties de oplossing van de differentiaalvergelijking voor de functie $y = y(t)$:

$$y'' + y = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \cos(t-1) & t \geq 1 \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

3. (2) Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Leid een recurrente betrekking af voor de coëfficiënten van een machtreeksoplossing van bovenstaande vergelijking. Je hoeft deze betrekking NIET op te lossen.

4. We bekijken de volgende matrixdifferentiaalvergelijking voor de functie $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$:

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x},$$

met matrix A gedefinieerd door

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a. (5) Bereken e^{At} en geef de oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}$ met $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.
- b. (3) Bepaal een particuliere oplossing van het inhomogeen probleem

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t.$$

5. Gegeven is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t), y(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x^2 + 2xy - x, \\ \frac{dy}{dt} &= -2xy - y^2 + y. \end{cases}$$

- a. (2) Vind alle evenwichtspunten.
- b. (2) Karakteriseer en bepaal de stabiliteit van de evenwichtspunten met behulp van de *lineariseringstechniek*.
- c. (2) Bepaal de stabiliteit van de evenwichtspunten voor het *niet-lineaire* stelsel en beargumenteer je antwoord.
- d. (2) Laat zien dat de lijn $L = \{(x, y) | y = 1 - x, x \in \mathbb{R}\}$ een *invariante verzameling* is van bovenstaand stelsel differentiaalvergelijkingen, d.w.z. als op t_1 geldt $(x(t_1), y(t_1)) \in L$ dan $(x(t), y(t)) \in L$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.
- e. (3) Schets het faseportret in een enkel figuur. Geef ook de doorlooprichtingen van de oplossingen aan.

6. Beschouw de volgende matrixdifferentiaalvergelijking voor de vectorfunctie $\mathbf{y}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = (\mathbf{A} + \mathbf{C}(t))\mathbf{y}, \quad t > 0 \tag{1}$$

met $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$. Laat $\mathbf{A}$ een constante $n \times n$ matrix waarvan de eigenwaarden λ_i reëel deel < 0 hebben. Laat $\mathbf{C}(t)$ een continue matrixfunctie zó dat

$$\int_0^t \|\mathbf{C}(s)\| ds \quad \text{begrensd is voor alle } t \geq 0.$$

- a. (2) Schrijf de differentiaalvergelijking (1) om in een integraalvergelijking voor $\mathbf{y}(t)$.
- b. (2) Laat zien door gebruik te maken van $\|e^{\mathbf{A}t}\| \leq M e^{-mt}$, voor zekere constanten $m, M > 0$, dat moet gelden:

$$\|\mathbf{y}(t)\| e^{mt} \leq M \|\mathbf{y}_0\| + \int_0^t \|\mathbf{y}(s)\| e^{ms} \|\mathbf{C}(s)\| M ds$$

- c. (3) (BONUSOPGAVE) Laat zien dat uit onderdeel b) de volgende schatting volgt

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq M \|\mathbf{y}_0\| \exp \left(M \int_0^t \|\mathbf{C}(s)\| ds - mt \right)$$

- d. (2) Welke conclusie kun je trekken over de stabiliteit van de oplossingen met behulp van de ongelijkheid bij c) ?