

Tentamen Gewone differentiaalvergelijking, TW2030
Vrijdag 29 januari 2016, 13.30-16.30u

- Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 36 punten zijn in totaal te behalen; de puntenverdeling is zoals aangegeven in de opgaven.
-

1. (4) De differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$ wordt gegeven door

$$2y''' + y'' + 2y' + y = \sin t.$$

Geef de algemene oplossing $y(t)$.

- **Antwoord 1:** Substitueer $y(t) = e^{rt}$ in de vergelijking. Dit levert de volgende karakteristieke vergelijking op:

$$2r^3 + r^2 + 2r + 1 = (2r + 1)(r^2 + 1) = 0$$

Dus $r_1 = -\frac{1}{2}$, $r_{2,3} = \pm i$. De homogene oplossing is

$$y(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 \cos t + c_3 \sin t$$

Om een particuliere oplossing te vinden kan de vergelijking het best complex gemaakt worden:

$$2z''' + z'' + 2z' + z = e^{it}.$$

Dan is de reële oplossing $y_p(t) = \text{Im}[z(t)]$. Omdat e^{it} een oplossing is van de homogene vergelijking zal een complexe particuliere oplossing $z_p(t)$ van de vorm

$$z_p(t) = Ae^{it}$$

worden gezocht. Invullen in de DV levert

$$A(-4 + 2i) = 1$$

Oftewel

$$A = -\frac{1}{5} - \frac{i}{10}$$

Dus

$$\begin{aligned} z_p(t) &= \left(-\frac{1}{5} - \frac{i}{10}\right)(\cos t + i \sin t)t \\ &= \left(-\frac{1}{5} \cos t + \frac{1}{10} \sin t\right)t - i\left(\frac{1}{5} \sin t + \frac{1}{10} \cos t\right)t \end{aligned} \quad (1)$$

Hieruit volgt meteen

$$y_p(t) = \text{Im}[z_p(t)] = -\left(\frac{1}{5} \sin t + \frac{1}{10} \cos t\right)t$$

De algemene oplossing $y(t) = y_p(t) + y_{hom}(t)$ en gelijk aan

$$y(t) = -\left(\frac{1}{5} \sin t + \frac{1}{10} \cos t\right)t + c_1 e^{-t/2} + c_2 \cos t + c_3 \sin t$$

2. (5) Bepaal met behulp van Laplace transformaties de oplossing van de differentiaalvergelijking voor de functie $y = y(t)$:

$$y'' + y = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ \cos(t-1) & t \geq 1 \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Antwoord 2 Laplace transformeren aan beide zijden geeft

$$s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) + L[y] = L[H_1(t) \cos(t-1)] = e^{-s}s/(s^2 + 1)$$

Hieruit volgt

$$L[y] = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{e^{-s}s}{(s^2 + 1)^2}$$

Terugtransformeren gaat met de tabel. De eerste term aan de rechterzijde is de Laplacegetransfomeerde van $\cos(t)$. Uit

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{-2s}{(s^2 + 1)^2}$$

volgt

$$L^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + 1)^2} \right] = t/2 \sin(t)$$

Hieruit vinden we de gezochte oplossing

$$y(t) = \cos t + \frac{1}{2} H_1(t)(t-1) \sin(t-1)$$

3. (2) Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Leid een recurrenente betrekking af voor de coëfficiënten van een machtreeksoplossing van bovenstaande vergelijking. Je hoeft deze betrekking NIET op te lossen.

- **Antwoord 3:** Direct invullen van $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en gelijkstellen van de machten van alle x^n aan 0, geeft

$$a_{n+2} = \frac{2(n-1)a_n}{(n+2)(n+1)} \quad n \geq 0$$

4. We bekijken de volgende matrixdifferentiaalvergelijking voor de functie $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

met matrix A gedefinieerd door

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) [5 pnt] Bereken e^{At} en geef de oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ met $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. b) [3 pnt] Bepaal een particuliere oplossing van

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord 4a: Omdat matrix A een drievoudige eigenwaarde -1 bezit kun je schrijven

$$e^{At} = e^{-It+Nt} = e^{-t}e^{Nt},$$

waarbij de matrix N nilpotent en gelijk is aan

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Omdat de eenheidsmatrix I met elke matrix commuteert, dus ook met N , mag je bovenstaande vereenvoudiging maken. Het uitrekenen van e^{Nt} gaat met behulp van de machtreeks

$$e^{Nt} = I + Nt + N^2t^2/2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t^2/2$$

Waaruit volgt dat

$$e^{At} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & -2t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

antwoord 4b Probeer een oplossing van de vorm $\mathbf{b}e^t$ Invullen in de DV geeft

$$\mathbf{b}e^t = A\mathbf{b}e^t + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dit kunnen we herschrijven (na uitdelen van e^t als

$$(A - I)\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

waaruit meteen volgt $\mathbf{b} = [\frac{1}{2} \ 0 \ 0]^T$

5. Gegeven is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t), y(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x^2 + 2xy - x \\ \frac{dy}{dt} &= -2xy - y^2 + y. \end{cases}$$

- a. (2) Vind alle evenwichtspunten.
- b. (2) Karakteriseer en bepaal de stabiliteit van de evenwichtspunten voor het *gelineariseerde* stelsel.
- c. (2) Bepaal de stabiliteit van de evenwichtspunten voor het *niet-lineaire* stelsel en beargumenteer je antwoord.
- d. (2) Laat zien dat de lijn $L = \{(x, y) | y = 1 - x, x \in \mathbb{R}\}$ een baan is van de differentiaalvergelijking.
- e. (3) Schets het faseportret in een enkel plaatje. Geef ook de richtingen van oplossingen aan.

antwoord 5:

a: Er zijn 4 evenwichtspunten, die gevonden worden uit de oplossing van $\dot{x} = \dot{y} = 0$:

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (0, 1), \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

b: Reken de Jacobi-matrix uit

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y - 1 & 2x \\ -2y & -2x - 2y + 1 \end{pmatrix}$$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

met eigenwaarden -1 and 1 . Dus $(0, 0)$ is een **zadelpunt**.

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

met eigenwaarden -1 and 1 . Dus $(1, 0)$ is een **zadelpunt**.

$$J(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

met eigenwaarden 1 and -2 . Dus $(0, 1)$ is een ook **zadelpunt**.

$$J(1/3, 1/3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

met eigenwaarden $i/\sqrt{3}$ and $-i/\sqrt{3}$. Hence $(1/3, 1/3)$ is een **centrum**. Dit punt is stabiel.

c: Het karakter en de stabiliteit van de gevonden evenwichtspunten is zowel voor het lineaire als het niet-lineaire stelsel hetzelfde in het geval van de zadelpunten (Stelling Hartman-Grobmann). Dit is zo, omdat de eigenwaarden reëel deel ongelijk 0 hebben en het systeem niet-lineaire DVs rond de evenwichtspunten kan worden geschreven als een lineaire DV + kwadratische termen die sneller naar 0 gaan dan de lineaire termen in de buurt van de evenwichtspunten. (stelling 2 par 4.3) De stabiliteit van het centrumpunt is onbepaald in het lineaire geval omdat het reële deel van de eigenwaarden 0 is.

d: Bereken

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-2xy - y^2 + y}{x^2 + 2xy - x}$$

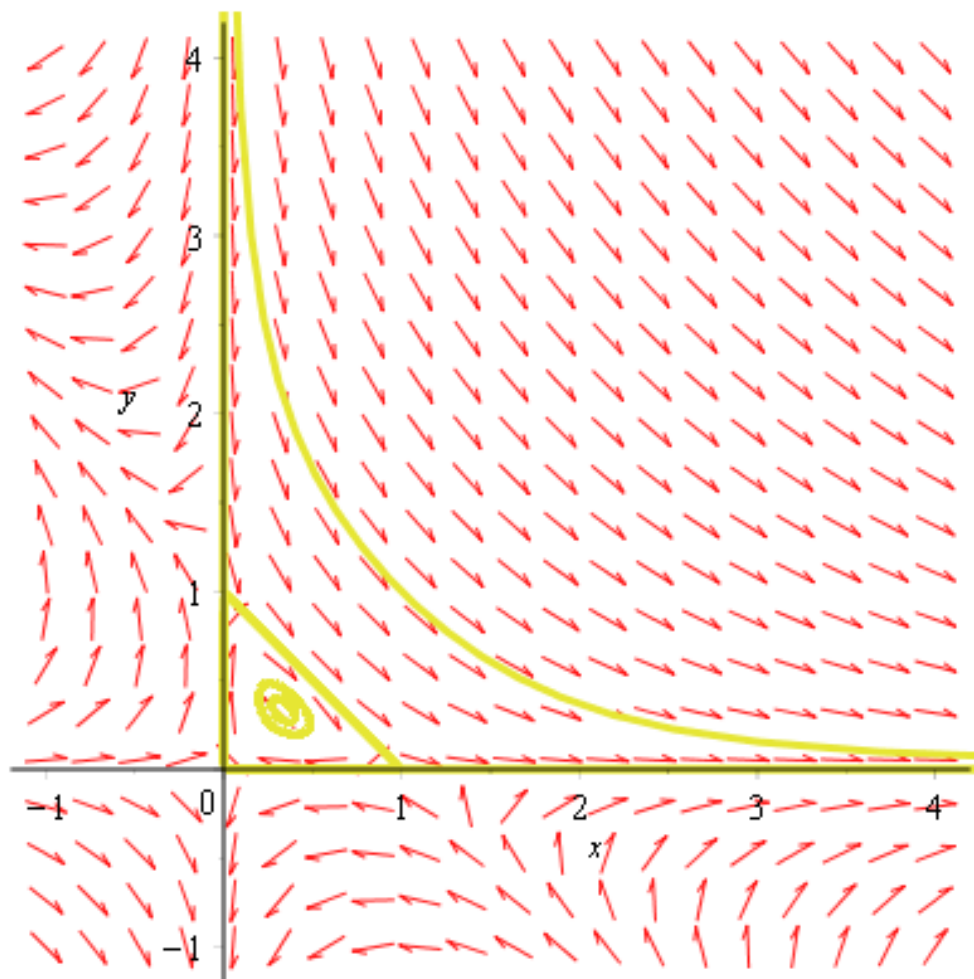
en substitueer nu $y = 1 - x$. Dit geeft

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - x}{x^2 - x} = -1$$

Dus de verzameling $\{y = 1 - x\}$ is invariant, want als je oplossing begint op $y = 1 - x$ dan blijf je altijd op deze verzameling, want de vergelijking voor de baan, die y als functie van x beschrijft heeft altijd een afgeleide -1 voor alle punten op de verzameling $y = 1 - x$.

Bereken de invariante manifolds $x = 0$, $y = 0$.

Toon de evenwichtspunten en bereken de eigenvectoren. Met alle informatie kan dan een faseportret als onderstaand worden geschetst.



e:

Figure 1: faseportret van stelsel

5. Beschouw de volgende matrixdifferentiaalvergelijking voor de vectorfunctie $\mathbf{y}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = (A + \mathbf{C}(t))\mathbf{y} \quad (2)$$

op het interval $[0, \infty)$ met $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$. Laat A een constante $n \times n$ matrix waarvan de eigenwaarden λ_i reëel deel < 0 hebben. Laat $\mathbf{C}(t)$ een continue matrixfunctie zó dat

$$\int_0^t \|\mathbf{C}(s)\| ds \quad \text{begrensd is voor alle } t \geq 0$$

- a. (2) Schrijf de differentiaalvergelijking (2) om in een integraalvergelijking voor $\mathbf{y}(t)$.
- b. (2) Laat zien door gebruik te maken van $\|e^{At}\| \leq M e^{-mt}$, voor zekere constanten $m, M > 0$, dat moet gelden:

$$\|\mathbf{y}(t)\| e^{mt} \leq M \|\mathbf{y}_0\| + \int_0^t \|\mathbf{y}(s)\| e^{ms} \|\mathbf{C}(s)\| M ds$$

- c. (3) (BONUSOPGAVE) Laat zien dat uit onderdeel b) de volgende schatting volgt

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq M \|\mathbf{y}_0\| \exp \left(M \int_0^t \|\mathbf{C}(s)\| ds - mt \right)$$

- d. (2) Welke conclusie kun je trekken over de stabiliteit van de oplossingen door gebruik van c) te maken?

Antwoord 5

- a Direct integreren geeft

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t [\mathbf{A} + \mathbf{C}(s)] \mathbf{y}(s) ds .$$

- b Probeer een oplossing van de vorm $\mathbf{y}(t) = e^{At} \mathbf{u}(t)$. Substitueren in de differentiaalvergelijking levert.

$$e^{At} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A} e^{At} = \mathbf{A} e^{At} \mathbf{u} + \mathbf{C} e^{At} \mathbf{u}$$

Hieruit volgt meteen een DV voor $\mathbf{u}$

$$\dot{\mathbf{u}} = e^{-At} \mathbf{C} e^{At} \mathbf{u}$$

Gebruik nu dat $\mathbf{u}(0) = \mathbf{y}(0)$ en integreer bovenstaande vergelijking van 0 tot t , zodat

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{-As} \mathbf{C} e^{As} \mathbf{u}(s) ds$$

Een laatste vereenvoudiging met e^{At} en gebruiken dat $\mathbf{y}(s) = e^{As} \mathbf{u}(s)$ geeft

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} \mathbf{C} \mathbf{y}(s) ds$$

Neem nu de norm en gebruik de hint. Wanneer je dan nog veremeigvuldigt met e^{mt} dan vind je de gevraagde ongelijkheid.

c) Bonus Ga uit van b). Definieer $w(t) = \|\mathbf{y}(t)\|e^{Mt}$. Er geldt dan

$$w(t) \leq M\|\mathbf{y}_0\| + M \int_0^t w(s)\|\mathbf{C}(s)\| ds$$

waar $w(t) \geq 0$ en natuurlijk $\|C(s)\| \geq 0$. Vermenigvuldig bovenstaande ongelijkheid links en rechts met $\|C(t)\|$ en definieer $U(t)$ door

$$U(t) = \int_0^t w(s)\|C(s)\| ds$$

Door te Vermenigvuldigen met $e^{-M \int_0^t \|C(s)\| ds}$ kunnen we de ongelijkheid herschrijven als

$$\frac{d}{dt} \left[U e^{-M \int_0^t \|C(s)\| ds} \right] \leq M \|C(t)\| U e^{-M \int_0^t \|C(s)\| ds}$$

Dus voor all $t > 0$ hebben we nu

$$U(t) \leq \|\mathbf{y}_0\| \left(e^{M \int_0^t \|C(s)\| ds} - 1 \right)$$

Omdat ook geldt

$$w(t) - M\|\mathbf{y}_0\| \leq MU(t)$$

volgt nu direct het gevraagde

- d Uit de ongelijkheid bij c) volgt nu dat het verschil tussen twee oplossingen begrensd is voor all $t > 0$ steeds kleiner wordt naarmate t toeneemt. Dus we hebben stabiliteit en zelfs asymptotische stabiliteit omdat voor $t \rightarrow \infty$ $\|\mathbf{y}(t)\| \rightarrow 0$ en dus $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}$