

Tentamen Gewone differentiaalvergelijking, TW2030
Dinsdag 10 maart 2015, 14.00-17.00

- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 36 punten zijn in totaal te behalen; de puntenverdeling is zoals aangegeven in de opgaven.
-

1. (4) De differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$ wordt gegeven door

$$(\sin y + 2t) + (t \cos y + 3y^3) \frac{dy}{dt} = 0, \quad t > 0.$$

Bepaal of de differentiaalvergelijking exact is en geef (in impliciete vorm) de algemene oplossing $y(t)$ voor $t > 0$.

2. (4) Bepaal met behulp van Laplace transformaties de oplossing van de differentiaalvergelijking voor de functie $y = y(t)$:

$$y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 10 \\ 0 & t \geq 10 \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

3. (8) We bekijken de volgende matrixdifferentiaalvergelijking voor de functie $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

met matrix A gedefinieerd door

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bereken e^{At} en geef de algemene oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.

$$e^{At} = X(t) X^{-1}(0)$$

15:00

4. Gegeven is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t), y(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x((x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) - \alpha) \\ \frac{dy}{dt} = -x - y((x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) - \alpha) \end{cases}, \quad (1)$$

met $\alpha \in [-1, 0]$ een parameter.

- (1) Vind de/het evenwichtspunt(en) van het stelsel (1).
- (2) Klassificeer en geef de stabiliteit van de/het onder (a) gevonden evenwicht(en) van het *gelineariseerde* stelsel voor alle $\alpha \in [-1, 0]$.
- (2) Schrijf het stelsel (1) in poolcoördinaten (r, θ) en laat zien dat

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -r(r^4 - 2r^2 - \alpha) \\ \frac{d\theta}{dt} = -1. \end{cases},$$

- (1) Bepaal de stabiliteit van de evenwichtspunt(en) voor het *niet-lineaire* stelsel voor alle $\alpha \in [-1, 0]$.
- (2) Bepaal (indien mogelijk) de limietcycles en hun stabiliteit voor alle $\alpha \in [-1, 0]$.
- (2) Schets het faseportret voor $-1 < \alpha < 0$. Geef ook de richtingen van oplossingen aan.

5. Beschouw het volgende beginwaardeprobleem voor de functie $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ met $t \in [t_0, \infty)$ en $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (2)$$

waarbij $A(t)$ een tijdsafhankelijke $n \times n$ matrix is. Laat $M(t)$ de grootste eigenwaarde van $A(t) + A^T(t)$ zijn, met $A^T(t)$ de getransponeerde van A .

- (2) Bewijs dat

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{y}(t)|^2 = \mathbf{y}^T(t)(A(t) + A^T(t))\mathbf{y}(t),$$

waarin $|\cdot|^2$ de Euclidische norm is, dus $|\mathbf{y}(t)|^2 = \sum_{i=1}^n y_i(t)^2$

- (2) Laat zien dat uit het feit dat $A(t) + A^T(t)$ symmetrisch is volgt dat

$$\mathbf{y}^T(t)(A(t) + A^T(t))\mathbf{y}(t) \leq M(t)|\mathbf{y}(t)|^2.$$

- (3) Toon aan dat als ϕ een continue niet-negatieve functie op $[t_0, \infty)$ is, de ongelijkheid van Gronwall geldt, d.w.z. laat zien dat uit

$$\phi(t) \leq \phi(t_0) + \int_{t_0}^t M(s)\phi(s) ds,$$

volgt dat

$$\phi(t) \leq \phi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t M(s) ds\right)$$

- (1) Gebruik het resultaat onder (c) om te bewijzen dat

$$|\mathbf{y}(t)|^2 \leq |\mathbf{y}_0|^2 \exp\left(\int_{t_0}^t M(s) ds\right)$$

- (2) Als gegeven is dat $\int_{t_0}^{\infty} M(s) ds = -\infty$, wat voor conclusie kun je dan trekken over de oplossingen van (2) als $t \rightarrow \infty$?