

ANTWOORDEN van Tentamen Gewone differentiaalvergelijkingen, TW2030
Vrijdag 30 januari 2015, 14.00-17.00

- Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 36 punten zijn in totaal te behalen; de puntenverdeling is zoals aangegeven in de opgaven.
-

1. (4) De differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$ wordt gegeven door

$$2ty^3 + 3t^2y^2 \frac{dy}{dt} = 0, \quad t > 0.$$

Bepaal of de differentiaalvergelijking exact is en geef de algemene oplossing $y(t)$ voor $t > 0$.

Answer:

Schrijf:

$$M(t, y) = 2ty^3, \quad N(t, y) = 3t^2y^2,$$

Uit de berekening

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6ty^2, \quad \frac{\partial N}{\partial t} = 6ty^2$$

volgt de differentiaalvergelijking exact is. We willen nu $\phi(t, y)$ vinden zodanig dat de exacte differentiaalvergelijking kan worden geschreven als

$$\frac{d\phi}{dt} = 0.$$

Oplossen van

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M(t, y),$$

geeft

$$\phi(t, y) = t^2y^3 + h(y),$$

met h een willekeurige diffb. functie. Uit $\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(t, y)$ volgt dat $h(y)$ constant is. Dus de functie $\phi(t, y) = t^2y^3$ en de oplossingen $y(t)$ kun je dus vinden uit

$$t^2y^3 = C, \tag{1}$$

$$y(t) = Ct^{-2/3}, \tag{2}$$

met C een willekeurige constante $\in \mathbb{R}$

2. Een tweede orde differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ wordt gegeven door

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{3}$$

- a. (1) Bepaal de singuliere punt(en) van (3) als die er zijn. Zijn de punt(en) regulier singulier of irregulier singulier?
- b. (2) Leid een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n af, als $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeksoplossing is van (3), en toon aan dat convergentiestraal van de machtreeks tenminste 1 is.
- c. (2) Geef de oplossing van (3) met beginvoorwaarden $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Answer:

- a) Er zijn 2 singulier punten nl. $x = 1$ en $x = -1$, want dan wordt de coëfficiënt voor y'' nul. Om te zien of het regulier singulier punten zijn, kun je bijv. de limieten nemen

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x(x-1)}{x^2-1} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)^2}{x^2-1} = 0.$$

en

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x(x+1)}{x^2-1} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)^2}{x^2-1} = 0.$$

Omdat deze limieten bestaan zijn $x = 1$ en $x = -1$ regulier singulier punten.

- b) De recurrente betrekking kan gevonden door $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in (3) te substitueren.

$$\begin{aligned} & (x^2-1) \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2} (n+2)(n+1) - a_n n(n-1) - 2n a_n + 2a_n] x^n = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Dus we vinden

$$a_{n+2} = a_n \frac{(n-2)(n-1)}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 0.$$

De convergentiestraal is tenminste 1, omdat volgens een stelling uit Braun, de machtreeks oplossing van $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ een convergentiestraal heeft die tenminste gelijk is aan het minimum van de convergentiestralen van $p(x)$ en $q(x)$. $p(x)$ heeft een convergentiestraal 1 en $q(x)$ ook, dus de machtreeks oplossing bestaat in ieder geval voor all $x \in (-1, 1)$. Je kunt ook gewoon de convergentiestraal R uitrekenen in dit geval d.m.v.

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = 1$$

(of nog netter dmv een limsup nemen)

- c) Wanneer we de a_n proberen uit te rekenen. Vinden we

$$a_2 = a_0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0.$$

Dus de oplossing is

$$y(x) = a_0 + a_0 x^2 + a_1 x.$$

- d) Als $y(0) = 0$ volgt meteen dat $a_0 = 0$ en $y'(0) = 1$ impliceert $a_1 = 1$. Dus de oplossing is $y(x) = x$.

3. (4) Bepaal met behulp van Laplace transformaties de oplossing van de differentiaalvergelijking voor de functie $y = y(t)$:

$$y'' + y = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 2 \\ e^{-t} & t \geq 2 \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Answer:

Neem de Laplace transformatie aan beide zijden van de DV. Dit geeft

$$\mathcal{L}[y'' + y] = s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{-t}H_2(t)]$$

Gebruik nu dat $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ en dat $e^{-t}H_2(t) = e^{-(t-2)}H_2(t)e^{-2}$, zodat de formule uit de Laplace tabel kan worden toegepast. Dit geeft dan

$$\mathcal{L}[y](s^2 + 1) = s + \frac{e^{-2}e^{-2s}}{s + 1}.$$

Ofwel

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{e^{-2}e^{-2s}}{(s + 1)(s^2 + 1)}.$$

Om te kunnen terugtransformeren moet de laatste term worden gebreuksplitst. Dit gaat als volgt:

$$\frac{A}{s + 1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1} = \frac{s^2(A + B) + s(B + C) + A + C}{(s + 1)(s^2 + 1)} = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + 1)}.$$

Hieruit volgt dat $A = C = \frac{1}{2}$, en $B = -\frac{1}{2}$.

Nu kunnen we direct uit de tabel aflezen wat de inverse Laplace getransformeerden cvan alle termen zijn en we vinden

$$y(t) = \cos t + H_2(t)e^{-2} \left[\frac{1}{2}e^{-(t-2)} - \frac{1}{2}\cos(t-2) + \frac{1}{2}\sin(t-2) \right]$$

4. (8) We bekijken de volgende matrixdifferentiaalvergelijking voor de functie $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

met matrix A gedefinieerd door

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bereken e^{At} en geef de algemene oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.

Answer:

Er zijn veel manieren om deze opgave op te lossen. Ik zal hier de oplossing met gebruik van Jordan normaalvorm bespreken en de methode zoals die in het boek staat mbv een fundamentealmatrix

De eigenwaarde kun je direct aflezen uit de matrix. De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = -1$ (multipliciteit 2) en $\lambda_2 = 1$. Uitrekenen van de eigenruimte behorend bij $\lambda = -1$ geeft

$$E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

De gegeneraliseerde eigenruimte bij $\lambda = -1$ wordt gevonden door op te lossen

$$(A - \lambda_1 I)^2 \mathbf{v}_2 = 0.$$

Dit geeft de vergelijking

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

en de gegeneraliseerde eigenvector $\mathbf{v}_2$ ligt in het opspansel $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, want je kiest $\mathbf{v}_2$ zo dat $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ lineair onafhankelijk zijn. Merk op dat $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. Bij de eigenwaarde $\lambda_2 = 1$

vinden we een eigenvector $\mathbf{v}_3 \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, door het oplossen van

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

We kunnen nu e^{At} als volgt uitrekenen:

$$e^{At} = e^{TT^{-1}ATT^{-1}t} = Te^{Jt}T^{-1},$$

waar T de transformatiematrix is die als kolommen de vectoren $\mathbf{v}_i$ bevat en J is de matrix A tov basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, oftewel de Jordannormaalvorm van A . Dus:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Het vinden van e^{At} is nu gereduceerd tot het vermenigvuldigen van 3 matrices:

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & -2e^{-t} + 2e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Hierbij hebben we e^{Jt} op de gebruikelijke manier uitgerekend

$$\begin{aligned}
 e^{Jt} &= \exp \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t \right] = \\
 &= \exp \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} t \right] \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t \right] = \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \left[I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t \right] = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Hierbij hebben we gebruikt dat de matrices in de exponent commuteren en dat de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nulpotent is.

De algemene oplossing is nu $e^{At}\mathbf{x}_0$, met $\mathbf{x}_0$ een willekeurige vector in $\mathbb{R}^3$.

De manier met gebruik van de fundamentealmatrix lijkt erg op het bovenstaande. Je zoekt 3 lineair onafhankelijke oplossingen van de differentiaalvergelijking. De eerste is

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}\mathbf{v}_1$$

De tweede oplossing is

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{-\lambda_1 t} e^{(A - \lambda_1 I)t} \mathbf{v}_2 = e^{-t} [I + (A - \lambda_1 I)t] \mathbf{v}_2 = e^{-t} \mathbf{v}_2 + e^{-t} t \mathbf{v}_1$$

De derde oplossing is

$$\mathbf{x}_3(t) = e^t \mathbf{v}_3$$

De fundamentealmatrix $\Phi(t)$ is dus

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Nu kun je e^{At} berekenen uit

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & -2e^{-t} + 2e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

5. Gegeven is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t), y(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -2 \cos x - \cos y \\ \frac{dy}{dt} &= -\cos x - 2 \cos y \end{cases}$$

a. (2) Vind alle evenwichtspunten in $D = \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

- b. (2) Karakteriseer en bepaal de stabiliteit van de evenwichtspunten in D voor het *geïlineariseerde* stelsel.
- c. (1) Bepaal de stabiliteit van de evenwichtspunten in D voor het *niet-lineaire* stelsel en beargumenteer je antwoord.
- d. (1) Laat zien dat de lijn $L = \{(x, y) | y = x, \quad x, y \in \mathbb{R}\}$ een invariante verzameling is, d.w.z. als voor zekere t_1 het punt $(x(t_1), y(t_1)) \in L$ dan $(x(t), y(t)) \in L$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.
- e. (3) Schets het faseportret in een enkel plaatje. Geef ook de richtingen van oplossingen aan.

Answer:

a) Evenwichtspunten vinden we door $\dot{x} = \dot{y} = 0$ te stellen. Dit geeft $\cos x = 0$ and $\cos y = 0$, en dus zijn de evenwichtspunten op het gevraagde domein:

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right).$$

b)

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cos x - \cos y \\ -2 \cos y - \cos x \end{pmatrix},$$

en de Jacobi matrix $J(x, y)$ is

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin x & \sin y \\ \sin x & 2 \sin y \end{pmatrix}$$

Analyseer de eigenwaarden van J voor elk van de punten gevonden in i)

In $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, heeft twee positieve reële eigenwaarden, namelijk $r_1 = 1, r_2 = 3$; dit correspondeert met een **instabiele knoop**.

In $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $J = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, heeft 1 positieve and 1 negatieve reële eigenwaarde, namelijk $r_1 = \sqrt{3}, r_2 = -\sqrt{3}$; dit correspondeert met een **zadelpunt**, dat natuurlijk **instabiel** is.

In $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, heeft opnieuw een positieve and een negatieve reële eigenwaarden namelijk $r_1 = \sqrt{3}, r_2 = -\sqrt{3}$, en dit is dus weer een **zadelpunt**, dat per definitie **instabiel** is.

In $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $J = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, heeft twee negatieve reële eigenwaarden, namely $r_1 = -1, r_2 = -3$, en dit punt correspondeert dus met een **asymptotisch stabiele knoop**.

c) De stabiliteit van de gevonden punten voor het niet-lineaire stelsel is gelijk aan de stabiliteit van de evenwichtspunten van het lineaire stelsel, omdat de eigenwaarden een reël deel ongelijk 0 hebben. [opm: De voorwaarde dat de niet lineaire termen een kleine correctie vormen in de buurt van de evenwichtspunten is duidelijk]

d) Reken bijvoorbeeld uit:

$$\frac{d(y - x)}{dt} = \dot{y} - \dot{x} = \cos x - \cos y.$$

Dus als $y = x$ is op tijdstip t dan is daar $\frac{d(y-x)}{dt} = 0$ en dus zal een oplossing beginnend op $x = y$ daatr altijd opblijven. Daarmee is aangetoond dat L een invariante verzameling is.

e) Voor een goede schets hebben we ook de eigenvectoren nodig. Voor de zadelpunten geeft dit:
 $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$: $r_1 = \sqrt{3}$ leads to

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$r_2 = -\sqrt{3}$ leidt tot

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: $r_1 = \sqrt{3}$ leads to

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$r_2 = -\sqrt{3}$ leidt tot

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: $r_1 = 3$ leidt tot

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en $r_2 = 1$ tot

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$: $r_1 = -1$ leidt tot

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en $r_2 = -3$ tot

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking voor de functie $y = y(x)$ op het gesloten interval $[0, \beta]$ ($\beta > 0$):

$$\frac{dy}{dx} = y g(x, y), \quad y(0) = 1. \quad (6)$$

Neem aan dat de functie g continu en begrensd is.

- Schrijf de differentiaalvergelijking (6) om in een integraalvergelijking.
- Laat zien dat er een constante $C > 0$ bestaat zodanig dat

$$|y(x)| \leq e^{Cx} \quad \text{voor alle } x \in [0, \beta].$$

Answer:

- Integreren aan beide zijden van de vergelijking en gebruik van de beginvoorwaarde geeft

$$\int_0^x \frac{dy}{ds} ds = \int_0^x y(s)g(s, y(s)) ds$$

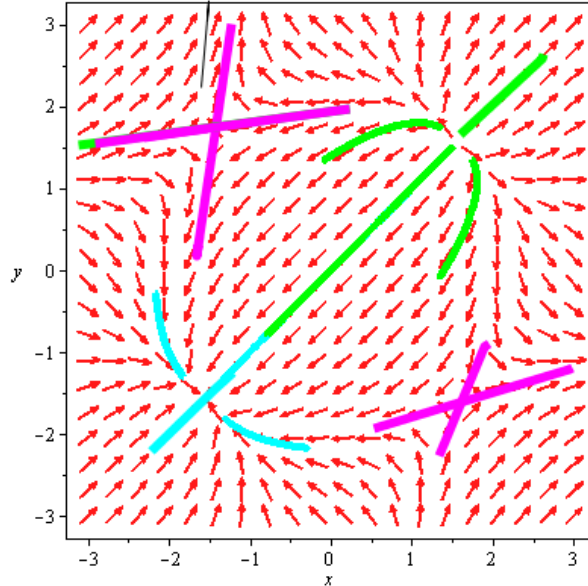


Figure 1: Een schets van het faseportret.

ofwel

$$y(s) = 1 + \int_0^x y(s)g(s, y(s)) ds$$

b) Uitgaande van de integraalvergelijking gevonden onder a) kunnen we de volgende afchatting maken:

$$\begin{aligned} |y(x)| &= \left| 1 + \int_0^x y(s)g(s, y(s)) ds \right| \leq 1 + \left| \int_0^x y(s)g(s, y(s)) ds \right| \\ 1 + \int_0^x |y(s)||g(s, y(s))| ds &\leq 1 + C \int_0^x |y(s)| ds, \end{aligned} \quad (7)$$

waarbij gebruikt is dat $g(x, y) \leq C$, zodat de laatste afchatting is te maken.

De laatste stap is het gebruiken van de Gronwall ongelijkheid. Je kunt die ook zelf voor dit geval afleiden. Dit gaat als volgt: Definieer

$$w(x) = \int_0^x |y(s)| ds,$$

dan vinden we dat $w(x)$ voldoet aan:

$$\frac{dw}{dx} - Cw \leq 1 \quad (8)$$

Vermenigvuldig links en rechts met e^{-Cx}

$$e^{-Cx} \left[\frac{dw}{dx} - Cw \right] = \frac{d}{dx} (e^{-Cx}w) \leq e^{-Cx}$$

Dus

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-Cx} \left[w + \frac{1}{C} \right] \right) \leq 0$$

Omdat $e^{-Cx} \left[w(x) + \frac{1}{C} \right]$ een dalende functie is op $[0, \beta]$ vinden we

$$e^{-Cx} \left[w(x) + \frac{1}{C} \right] \leq w(0) + \frac{1}{C} = \frac{1}{C}$$

Wat we kunnen herschrijven tot

$$Cw(x) + 1 \leq e^{Cx}$$

Door nu toe te passen dat $w(x)$ voldoet aan ongelijkheid (8) volgt

$$\frac{dw}{dx} = |y(x)| \leq e^{Cx}.$$

voor alle $x \in [0, \beta]$