

Tentamen Analyse 3, WI 2601
Dinsdag 16 april 2013, 14.00-17.00

- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 100 punten zijn in totaal te behalen; de puntenverdeling is zoals aangegeven in de opgaven.
 - *Succes !*
-

1. (10) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ gegeven door

$$y'' + y = \sin(x) + \cos^2(x). \quad (1)$$

2. Een tweede-orde differentiaalvergelijking wordt gegeven door

$$y'' - xy = 0, \quad (2)$$

waarin $y = y(x)$. We proberen een machtreeksoplossing rond $x = 1$ te vinden, door een recurrente betrekking voor de coëfficiënten af te leiden.

- a. (7) Bepaal de recurrente betrekking voor de coëfficiënten. Je hoeft deze *niet* op te lossen. Wat is de convergentiestraal van de gevonden machtreeks? *Hint: Gebruik voor bepaling van de convergentiestraal een stelling uit Braun.*
- b. (8) Geef de eerste 4 termen van de machtreeksoplossing die voldoet aan de beginvoorwaarden $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

3. (25) We bekijken het volgende 3-dimensionale stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2, \\ \dot{x}_3 &= -2x_3. \end{cases} \quad (3)$$

Bereken e^{At} , waarbij A de coëfficiëntenmatrix is behorend bij (3). Geef de algemene oplossing en het maximale gebied waarop deze oplossing bestaat.

4. Gegeven is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (x^2 - 1)y \\ \frac{dy}{dt} &= (x + 2)(y - 1)(y + 2).\end{aligned}\tag{4}$$

- a. (5) Vind alle evenwichtspunten van dit stelsel.
- b. (5) Bepaal de lineaire stabiliteit van de evenwichtspunten en classificeer deze punten voor het gelineariseerde systeem.
- c. (3) Bepaal de stabiliteit van de evenwichtspunten en classificeer ze voor het *niet-lineaire systeem* (4) indien mogelijk.
- d. (5) Een positief invariante verzameling $B \subseteq \mathbb{R}^2$ is een verzameling waarvoor het volgende geldt: als voor een oplossing ϕ op tijdstip t_0 geldt $\phi(t_0) \in B$ dan is ook $\phi(t) \in B$ voor alle $t > t_0$. Zijn er behalve de equilibria nog andere invariante verzamelingen van (4)? Zo ja, geef een expliciete beschrijving van de positief invariante verzamelingen die je kunt vinden. Zijn er ook twee-dimensionale invariante verzameling(en) en zo ja, welke?
- e. (7) Schets het faseportret met daarin alle equilibria en de invariante verzamelingen gevonden in (d).

5. Beschouw nu het volgende probleem voor $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ met $t \in [t_0, \infty)$ en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\tag{5}$$

waabij $A(t)$ een tijdsafhankelijke $n \times n$ matrix is. Laat $M(t)$ de grootste eigenwaarde van $A(t) + A^T(t)$ zijn, waarbij A^T de getransponeerde van A is.

- a. (5) Bewijs dat

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{x}(t)|^2 = \mathbf{x}^T(t) (A(t) + A^T(t)) \mathbf{x}(t),$$

waarin $|\cdot|^2$ de Euclidische norm is, dus $|\mathbf{x}(t)|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2(t)$.

- b. (5) Laat zien dat uit het feit dat $A^T(t) + A(t)$ symmetrisch is volgt dat

$$\mathbf{x}^T(t) (A(t) + A^T(t)) \mathbf{x}(t) \leq M(t)|\mathbf{x}(t)|^2.$$

- c. (7) Toon aan dat als ϕ een continue niet-negatieve functie op $[t_0, \infty)$ is, de ongelijkheid van Gronwall geldt. D.w.z. laat zien dat uit

$$\phi(t) \leq \phi(0) + \int_{t_0}^t M(s)\phi(s) ds$$

volgt dat

$$\phi(t) \leq \phi(0) e^{\int_{t_0}^t M(s) ds}.$$

- d. (5) Gebruik het resultaat bij (b) om te bewijzen dat

$$|\mathbf{x}(t)|^2 \leq |\mathbf{x}_0|^2 e^{\int_{t_0}^t M(s) ds}.$$

- e. (3) Als gegeven is dat $\int_{t_0}^{\infty} M(s) ds = -\infty$, wat geldt er dan voor de oplossingen van (5) als