

**Tentamen Analyse 3, WI 2601**  
**Vrijdag 1 februari 2013, 14.00-17.00**

- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
  - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
  - Normering: 100 punten zijn in totaal te behalen; de puntenverdeling is zoals aangegeven in de opgaven.
  - *Succes !*
- 

1. (10) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking voor  $y = y(x)$  gegeven door

$$y''' + 2y'' + y' = e^x. \quad (1)$$

Deze vergelijking is een lineaire derde orde DV met een inhomogene term. We zoeken eerst de homogene oplossing en vervolgens een particuliere. Voor de homogene maken we de Ansatz

$$y_{hom}(x) = e^{rx}$$

Dit geeft aanleiding tot de karakteristieke vergelijking.

$$r^3 + 2r^2 + r = r(r^2 + 2r + 1) = r(r + 1)^2 = 0$$

dus  $r_1 = 0$ , en  $r_2 = r_3 = -1$ . Dus  $y_{hom}(x) = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}$ . Vervolgens de particuliere oplossing vinden. Dit gaat het eenvoudigst door in te vullen  $y_{part}(x) = Ae^x$  (Merk op dat 1 geen wortel is van de karakteristieke vergelijking en deze Ansatz daarom goed werkt). Hieruit vinden we  $A = \frac{1}{4}$ . De algemene oplossing is dus

$$y(x) = \frac{1}{4}e^x + C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}.$$

2. De Gegenbauer differentiaalvergelijking, die toepassingen heeft in de potentiaaltheorie, wordt gegeven door

$$(1 - x^2)y'' - (2\alpha + 1)xy' + \lambda(\lambda + 2\alpha)y = 0, \quad (2)$$

waarin  $y = y(x)$  en waarin  $\alpha$  en  $\lambda$  parameters zijn.

- a. (3) Geef de singuliere punt(en) van de Gegenbauer differentiaalvergelijking (2) als die er zijn. Zijn de punt(en) regulier singulier of irregulier singulier?

De singuliere punten zijn natuurlijk  $x = 1$  en  $x = -1$ . Het punt  $x = 1$  is reguliersingulier, want de limieten  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2\alpha+1)x}{1-x^2}(x-1) = -1 - \alpha$  en  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda(\lambda+2\alpha)(x-1)^2}{x^2-1} = 0$  bestaan. Voor  $x = -1$  gaat het net zo.

- b. (5) Leid een recurrente betrekking voor de coëfficiënten  $a_n$  af, als  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  een machtreekoplossing is van (2) en bepaal de convergentiestraal van de machtreeks.

Substitutie van de machtreeks  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  in (2) geeft direct

$$\begin{aligned} (1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - (2\alpha+1)x \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \lambda(\lambda+2\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^n - (2\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n + \lambda(\lambda+2\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Dus de recurrente betrekking luidt

$$a_{n+2} = a_n \left[ \frac{n(n-1) + n(2\alpha+1) - \lambda(\lambda+2\alpha)}{(n+2)(n+1)} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

De convergentiestraal  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = 1$ .

- c. (5) Laat zien dat de algemene oplossing van (2) geschreven kan worden als  $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ , waarbij  $y_1(x)$  een even oplossing en  $y_2(x)$  een oneven oplossing is van (2); bereken de eerste twee termen van  $y_1(x)$  en  $y_2(x)$ .

Uit de afgeleide recurrente betrekking volgt onmiddellijk dat je twee lineair onafhankelijke oplossingen hebt,  $y_1(x)$  en  $y_2(x)$ , die respectievelijk uit de even en oneven machtreeksen in  $x$  bestaan. Ihb geldt dat  $y(0) = a_0$  en  $y'(0) = a_1$ . Verder kun je  $a_2$  berekenen. Hieruit volgt  $a_2 = -\frac{\lambda(\lambda+2\alpha)a_0}{2}$ , en geeft  $y_1(x) = \left[ 1 - \frac{\lambda(\lambda+2\alpha)}{2} x^2 \right]$ . De waarde van  $a_3 = \frac{((2\alpha+1)-\lambda(\lambda+2\alpha))}{6} a_1$ , en geeft de oneven oplossing  $y_2(x)$  als  $y_2(x) = \left[ x + \left( \frac{(2\alpha+1)-\lambda(\lambda+2\alpha)}{6} \right) x^3 \right]$ .

- d. (2) Wat gebeurt er met de oplossingen als  $\lambda \in \mathbb{N}$ ?

Als  $\lambda \in \mathbb{N}$  dan wordt de noemer van de recurrente betrekking 0 als  $n = \lambda$ . Eén machtreeks oplossing reduceert dan dus een polynoom.

- e. (5) Geef de oplossing van (2) met beginvoorwaarden  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  in het geval  $\lambda = 3$ .

Omdat  $y(0) = a_0 = 0$  houden we alleen de oneven termen over. Bovendien is  $a_1 = 1$ . We weten ook dat de term voor  $n = \lambda = 3$ , dus  $a_5 = 0$ . De oplossing wordt in dit geval dus gegeven door

$$y(x) = \left[ x + \left( \frac{(2\alpha+1) - 3(3+2\alpha)}{6} \right) x^3 \right] = x - \frac{2}{3}(\alpha+2)x^3.$$

3. (25) We bekijken het volgende 3-dimensionale stelsel differentiaalvergelijkingen voor  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 3x_1 - x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + 3x_3, \\ \dot{x}_3 &= -2x_3, \end{cases} \quad (4)$$

Bereken  $e^{At}$ , waarbij  $A$  de coëfficiëntenmatrix is behorend bij (4). Geef de algemene oplossing en het maximale gebied waarop deze oplossing bestaat.

Begin met het uitrekenen van de eigenwaarden. We vinden  $\lambda_1 = -2$  en  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ . De eigenruimte  $E_{-2} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  en de eigenruimte  $E_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . Vervolgens berekenen we een gegeneraliseerde eigenvector behorend bij  $\lambda_3 = 2$ . Zo'n vector is bijvoorbeeld  $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . De coördinatentransformatie  $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$  met  $S$  de matrix  $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]^T$  transformeert (4) tot een differentiaalvergelijking t.o.v. basis  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ . Deze vergelijking is

$$\dot{\mathbf{y}} = S^{-1}AS\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (5)$$

Omdat

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N \quad (6)$$

kunnen we schrijven  $e^{At} = Se^{S^{-1}At}S^{-1} = Se^{(N+D)t}S^{-1} = Se^{Dt}e^{Nt}S^{-1}$ , want  $DN = ND$ . Hiermee hebben we  $e^{At}$  als we bovenstaande uitvermenigvuldigen. De matrix  $S$  en zijn inverse  $S^{-1}$  zijn

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Dus

$$\begin{aligned} e^{At} &= S \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] S^{-1} = \\ &\begin{pmatrix} e^{2t}(t+1) & -te^{2t} & -te^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t} - te^{2t} & e^{2t}(1-t) - e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

De algemene oplossing is nu  $e^{At}\mathbf{x}_0$ , waarbij  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Deze oplossing bestaat voor alle  $t \in \mathbb{R}$ , omdat (4) een lineair stelsel differentiaalvergelijkingen is.

4. Gegeven is de volgende differentiaalvergelijking voor  $q = q(t)$ :

$$\frac{d^2}{dt^2}q = -V'(q), \quad V(q) = \frac{q^4}{4} - \frac{q^3}{3}. \quad (9)$$

waarbij het accent ' op  $V$  de afgeleide naar  $q$  nemen betekent.

a. (3) Schrijf (9) als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen.

Schrijf  $q = x$ , en  $y = q'$ , dan krijg je het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 - x^3, \end{cases} \quad (10)$$

b. (5) Vind de evenwichtspunten van dit stelsel.

De evenwichtspunten vind je door het rechterlid van (10) 0 te stellen. De evenwichtspunten zijn  $(0, 0)$  en  $(1, 0)$

c. (5) Bepaal de stabiliteit van de evenwichtspunten en classificeer ze.

Voor de stabiliteit moet je eerste de Jacobimatrix  $J$  uitrekenen.

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Invullen van  $(0, 0)$  in  $J$  geeft twee eigenwaarden 0. Dit punt kunnen we niet classificeren en de stabiliteit is niet door het lineaire gedrag bepaald. Invullen van  $(1, 0)$  in  $J$  geeft twee eigenwaarden  $\lambda = \pm i$ . Dit punt is dus een centrum in het lineaire geval en dan dus stabiel. Voor het niet-lineaire geval weten we niet of het centrum een centrum blijft of een aantrekkende danwel afstotende spiraal wordt.

d. (5) Laat zien dat er oneindig veel periodieke oplossingen zijn.

Reken eerst de banen uit. De vergelijking voor de banen luidt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - x^3}{y}. \quad (12)$$

Deze vergelijking integreren levert

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + K}$$

. Deze vergelijking beschrijft inderdaad oneindig veel gesloten banen. Dit kunnen we als volgt zien. De banen zijn symmetrisch onder spiegeling in de  $x$ -as. Door  $x = 0$  te stellen vinden we dat  $K > 0$  impliceert dat de banen de  $y$ -as snijden. De banen snijden ook de  $x$ -as, want als we  $x$  voldoende groot nemen of (voldoende klein) dan zal  $y^2(x)$  kleiner dan nul worden en wegens continuïteit dus ook een keer nul. Dat  $y(x)$  daal voor  $x > 1$  en stijgt voor  $x < 0$  volgt onmiddellijk door de expressie voor  $y^2(x)$  te differentiëren.

e. (5) Is er een  $q_0$  waarvoor de oplossing van (9) met beginwaarde  $(q(0), \frac{dq}{dt}(0)) = (q_0, 0)$  niet-periodiek is?

*Opmerking: Evenwichtspunten corresponderen per definitie met een periodieke oplossing en worden hier dus niet bedoeld.*

De baan die door  $(0, 0)$  heeft  $K = 0$  en is een homocliene baan, een geloten baan waarop een evenwichtspunt ligt, deie stabiele en instabiele richtingen van het punt met elkaar verbindt. De baan door  $(0, 0)$  snijdt verder de  $y$ -as in  $x = 4/3$ . Dus er is inderdaad een gesloten baan die niet periodiek is, als  $q_0 = \frac{4}{3}$  snijdt de

- f. (5) Schets het faseportret van het stelsel gevonden bij (a).

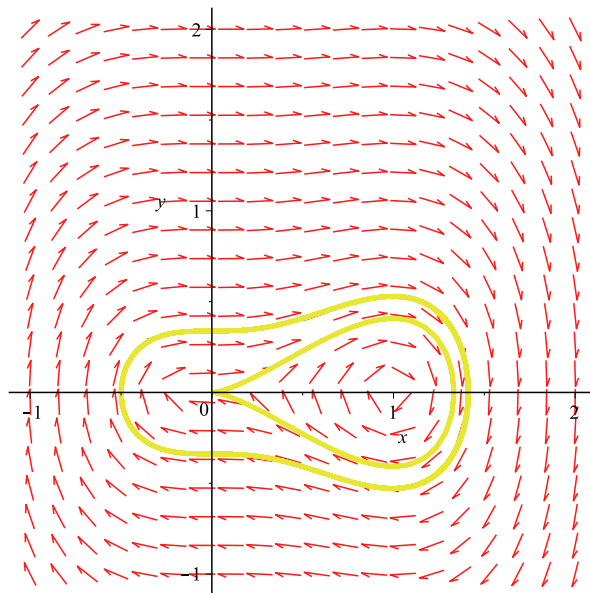


Figure 1: Het faseportret zoals dat door maple wordt getekend. De evenwichtspunten zijn de oorsprong en  $(1, 0)$

5. Beschouw nu het volgende probleem voor  $x = x(t)$  met  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{dx}{dt} = e^{-|x|}, \quad x(0) = 0. \quad (13)$$

- a. (4) Vind een oplossing van het beginwaardeprobleem (13).

De separabele differentiaalvergelijking (13) kunnen we direct oplossen als  $t \geq 0$

$$\int_0^x \exp(s) ds = \int_0^t 1 d\xi = t \quad (14)$$

Hieruit vinden we een oplossing die geldig is voor alle  $t \geq 0$ , omdat  $t > 0$  impliceert dat  $x(t) > 0$ . En deze oplossing is

$$x(t) = \ln(1 + t).$$

- b. (6) Formuleer de existentie- en eenduidigheidstelling en geef aan of het beginwaardeprobleem (13) aan de voorwaarden van deze stelling voldoet.

De existentie- en eenduidigheidstelling luidt: Het beginwaardeprobleem  $\dot{x} = f(t, x)$  met  $x(0) = x_0$  heeft een unieke (teminste  $C^1$ ) oplossing op een interval  $[-\alpha, \alpha]$  als wordt voldaan aan de volgende voorwaarden: 1. De functie  $f$  is continu in  $t$  op  $[-a, a]$ , en Lipschitz continu in  $x$  op voor alle  $x \in [-b, b]$ . 2. Als  $M = \max f(t, x)$  met  $t \in [-t_0, t_0]$  en  $x \in [-b, b]$  dan is  $\alpha = \min\{b/M, a\}$ . De functie  $e^{-|x|}$  is Lipschitz continu op  $\mathbb{R}$ , omdat  $(1 - e^{-|x|}) \leq |x|$  voor alle  $x \in \mathbb{R}$ . Je kunt natuurlijk ook gebruiken dat  $f$  continu differentieerbaar is in elk punt, behalve  $x = 0$ . Dit punt zul je dan nog apart moeten behandelen.

- c. (7) Bestaat er een *unieke* oplossing van (13) en *bestaat deze oplossing voor alle*  $t \in \mathbb{R}$ ? Beredeneer waarom dat wel of niet het geval is en geef aan of dit in overeenstemming is met de existentie- en eenduidigheidstelling.

De oplossing die onder (a) was gevonden geldt voor alle  $t \geq 0$ . De oplossing zal volgens de uniciteitsstelling uniek moeten zijn, dus de vraag is of we de oplossing die we gevonden hebben bij (a) kunnen uitbreiden voor  $t < 0$ . Dit is inderdaad het geval. Je kun direct aan de structuur van (13) zien dat als  $x(t)$  een oplossing dat  $-x(-t)$  dat ook is. Je kunt ook gewoon (13) opnieuw integreren nu voor  $t < 0$ . We vinden dan de oplossing

$$x(t) = \begin{cases} \ln(1+t), & t \geq 0 \\ -\ln(1-t), & t < 0 \end{cases} \quad (15)$$