

ANTWOORDEN van Tentamen Analyse 3, WI 2601

Vrijdag 8 november 2013, 14.00-17.00

- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 40 punten zijn in totaal te behalen; de puntenverdeling is zoals aangegeven in de opgaven.
-

1. (4) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ gegeven door

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-x} + x^2. \quad (1)$$

Answer:

Deze vergelijking is een tweede orde differentiaalvergelijking, dus eerst homogene oplossing zoeken. Probeer $y(x) = e^{rx}$ als oplossing voor de homogene vergelijking. Dit geeft de karakteristieke vergelijking

$$r^2 + 5r + 4 = (r + 4)(r + 1) = 0.$$

Dus $r_1 = -1$ en $r_2 = -4$ en de homogene oplossing is

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$$

Een particuliere oplossing kun je makkelijk vinden door te proberen

$$y_p(x) = A + Bx + Cx^2 + Dxe^{-x}.$$

Omdat e^{-x} een oplossing is van de homogene vergelijking geeft De^{-x} geen oplossing, moeten we met een extra x vermenigvuldigen. Dit invullen in de differentiaalvergelijking geeft

$$\begin{aligned} 2C + 5(B + 2Cx) + 4(A + Bx + Cx^2) &= x^2 \\ Dxe^{-x} - 2De^{-x} + 5(De^{-x} - Dxe^{-x}) + 4De^{-x}x &= e^{-x} \end{aligned}$$

Hieruit vinden we

$$3D = 1, \quad C = \frac{1}{4}, \quad 10C + 4B = 0, \quad 4A + 2C + 5B = 0,$$

oftewel

$$D = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{5}{8}, \quad A = \frac{21}{32}.$$

De algemene oplossing vinden we door de homogene oplossing op te tellen bij $y_p(x)$ en is dus

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{3} e^{-x} x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{8} x + \frac{21}{32}.$$

2. Een tweede orde differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ wordt gegeven door

$$(1 - x)y'' + xy' - y = 0. \quad (2)$$

- a. (2) Bepaal de singuliere punt(en) van (2) als die er zijn. Zijn de punt(en) regulier singulier of irregulier singulier?
- b. (3) Leid een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n af, als $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeksoplossing is van (2) en toon aan dat convergentiestraal van de machtreeks tenminste 1 is.
- c. (2) Laat zien dat de algemene oplossing van (2) geschreven kan worden als $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, waarbij $y_1(x)$ een oplossing is van (2) met even en oneven machten van x en $y_2(x)$ een oplossing die alleen oneven machten van x bevat; bereken de eerste drie termen van $y_1(x)$ en $y_2(x)$.
- d. (2) Geef de oplossing van (2) met beginvoorwaarden $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Is deze oplossing van het beginwaardeprobleem uniek? Zo ja, geef aan waarom; indien nee, geef een andere oplossing.

Answer:

- a) Er is maar 1 singulier punt nl. $x = 1$, want dan wordt de coëfficiënt voor y'' nul. Om te zien of het een reguliersingulier punt is, kun je bijv. de limieten nemen

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)x}{1-x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{1-x} = 0.$$

Omdat deze limieten bestaan is dit een regulier singulier punt.

- b) De recurrente betrekking kan gevonden door $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in (2) te substitueren.

$$\begin{aligned} & (1-x) \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (n-1) x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2} (n+2)(n+1) - a_{n+1} (n+1)n + n a_n - a_n] x^n = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Dus we vinden

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} (n+1)n - a_n (n-1)}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 0.$$

De convergentiestraal is tenminste 1, omdat volgens stelling uit Braun, de machtreeks oplossing van $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ een convergentiestraal heeft die tenminste gelijk is aan het minimum van de convergentiestralen van $p(x)$ en $q(x)$. $p(x)$ heeft een convergentiestraal 1 en $q(x)$ ook, dus de machtreeks oplossing bestaat in ieder geval voor all $x \in (-1, 1)$.

- c) Wanneer we de a_n proberen uit te rekenen. Vinden we

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = \frac{a_0}{4!}.$$

Merk nu op dat a_1 hier niet in voorkomt, dus als a_0 en a_1 bekend zijn, dan weten we de oplossing van de vergelijking.

$$y(x) = a_0 \left[1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots \right] + a_1 x.$$

We kunnen hier opmerken dat deze oplossing zelfs convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$. Omdat alle a_n voor $n \neq 1$ afhangen van a_0 bestaat $y_1(x)$ uit zowel even als oneven machten van x en daar $y_2(x) = a_1 x$ is deze functie inderdaad oneven.

d) Als $y(0) = 0$ volgt meteen dat $a_0 = 0$ en $y'(0) = 1$ impliceert $a_1 = 1$. Dus de oplossing is $y(x) = x$. Deze oplossing is uniek volgens de al eerder genoemde stelling.

3. We bekijken de volgende matrixdifferentiaalvergelijkingen:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{en} \quad \dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}, \quad (4)$$

met de matrices A en B gedefinieerd als

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (5) Bereken e^{At} en e^{Bt} en geef de algemene oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.
- (2) Bereken $e^{(A+B)t}$.
- (2) Is $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ in dit geval?
- (3) Geef een conditie wanneer $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ voor willekeurige $n \times n$ matrices A en B en $t \in \mathbb{R}$ en bewijs je bewering.

Answer:

Er zijn heel veel manieren om deze opgave op te lossen. Het makkelijkst gaat het als je herkent dat A bestaat uit twee blokken: een 1×1 -matrix met element -2 en een 2×2 -matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Wegens de blokstructuur kunnen we e-machten separaat uitrekenen en vermenigvuldigen.

Dit geeft direct e^{At} :

$$\begin{aligned} e^{At} &= \exp \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} t \right] \\ &= \exp \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t \right] \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} t \right] \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \cos(3t) & e^{-2t} \sin(3t) \\ 0 & -e^{-2t} \sin(3t) & e^{-2t} \cos(3t) \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(3t) & \sin(3t) \\ 0 & -\sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Voor e^{Bt} gaat dit op dezelfde wijze en vinden we

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \cos(3t) & -e^{2t} \sin(3t) \\ 0 & e^{-2t} \sin(3t) & e^{2t} \cos(3t) \end{pmatrix}.$$

De oplossing $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ is $e^{At}\mathbf{c}$, met $\mathbf{c}$ een constante vector.

b) Eerst uitrekenen $A + B$. Dit geeft

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De e-macht wordt verkregen door e-macht van de diagonaalelementen te nemen.

$$e^{(A+B)t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Direct veremingsvuldigen van de resultaten gevonden bij (a) levert:

$$e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(3t) & \sin(3t) \\ 0 & -\sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \cos(3t) & -e^{2t} \sin(3t) \\ 0 & e^{-2t} \sin(3t) & e^{2t} \cos(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dus inderdaad is in dit geval $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$. Dat komt omdat A en B rotaties om dezelfde $x - as$ voorstellen. Deze rotaties commuteren en dus is $AB = BA$ en derhalve is e-macht van de som van de twee matrices gelijk aan het product van de twee e-machten.

d). Als $AB = BA$, dan is altijd

$$e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}.$$

Dit kun je aantonen met de definitie van e-macht van een matrix. Beide zijden uitrekenen, gebruiken dat $AB = BA$, en het binomium van Newton gebruiken geeft dan de gelijkheid.

Een andere manier is met behulp van de existentie en eenduidigheidsstelling. Beschouw daarvoor

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + B)\mathbf{x},$$

met beginvoorwaarde $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Je weet dan dat de unieke oplossing van bovenstaande vergelijking $e^{(A+B)t}\mathbf{x}_0$ is. Definieer nu een andere functie $\mathbf{y}(t) = e^{At}e^{Bt}\mathbf{x}_0$. Differentiëren van $\mathbf{y}(t)$ geeft

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = e^{At}Ae^{Bt}\mathbf{x}_0 + e^{At}e^{Bt}B\mathbf{x}_0.$$

Indien $AB = BA$, kunnen we het rechterlid herschrijven als

$$(A + B)e^{(A+B)t}\mathbf{x}_0 = (A + B)\mathbf{y}(t).$$

Hiermee is aangetoond dat ook $\mathbf{y}(t)$ een oplossing is van $\dot{\mathbf{x}} = (A + B)\mathbf{x}$, die bovendien aan dezelfde beginconditie voldoet. Wegens de uniciteit van de oplossing moeten daarom wel gelden dat in het geval $AB = BA$,

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}.$$

4. Gegeven is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t), y(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + ay - y(x^2 + y^2),\end{aligned}\tag{6}$$

met a een reële parameter.

- a. (2) Schrijf het stelsel (6) in poolcoördinaten, d.w.z. schrijf $x(t) = r(t) \cos \theta(t), y(t) = r(t) \sin \theta(t)$ en laat zien dat de differentiaalvergelijkingen voor r en θ voldoen aan

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(a - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\tag{7}$$

- b. (1) Vind de/het evenwichtspunt(en) van (6) of (7).
- c. (3) Bepaal, voor zover mogelijk, de stabiliteit van de/het evenwichtspunt(en) en bepaal het type (zadel, focus, centrum, knoop) voor alle waarden van a door het systeem rond de/het punt(en) gevonden in (b) te lineariseren. Wat zegt de stabiliteit van deze punt(en) in het gelineariseerde systeem over de stabiliteit van deze punten in het niet-lineaire systeem (6)?
- d. (2) Voor welke waarden van a is er een gesloten baan? Is de periodieke oplossing corresponderend met deze baan stabiel? *Opmerking: Evenwichtspunten corresponderen per definitie met een periodieke oplossing en worden hier niet bedoeld.*
- e. (2) Schets het faseportret van het stelsel (6); onderscheid daarbij $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$. *Hint: Hierbij kun je het best uitgaan van de representatie in poolcoördinaten zoals afgeleid bij onderdeel (a).*

Answer:

- a) Vul $x(t) = r(t) \cos \theta(t), y(t) = r(t) \sin \theta(t)$ in in vergelijking (6). Dan vind je de volgende twee vergelijkingen

$$\begin{aligned}\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} &= ar \cos \theta - r \sin \theta - r^3 \cos \theta, \\ \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} &= r \cos \theta + ar \sin \theta - r^3 \sin \theta.\end{aligned}\tag{8}$$

De eerste vergelijking vermenigvuldigen met $\cos \theta$ en de tweede met $\sin \theta$ en vervolgens optellen resulteert in $\dot{r} = r(a - r^2)$. De eerste vergelijking vermenigvuldigen met $-\sin \theta$ en de tweede met $\cos \theta$ en vervolgens optellen resulteert in $\dot{\theta} = 1$.

b) De evenwichtspunten zijn het makkelijkst te vinden uit de vergelijkingen in poolcoördinaten. $\dot{r} = 0$ als $r = 0$ of $r = 1$. Maar als $r = 1$, dan is $\dot{\theta} \neq 0$, dus op $r = 1$ ligt geen evenwichtspunt. Als $r = 0$ daarentegen, dan is $x = y = 0$ en vinden we een evenwicht. Dus $(0, 0)$ is het enige evenwichtspunt.

- c) Lineariseren rond $(0, 0)$ geeft de gelineariseerde matrixdifferentiaalvergelijking:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \mathbf{x} = J\mathbf{x}.$$

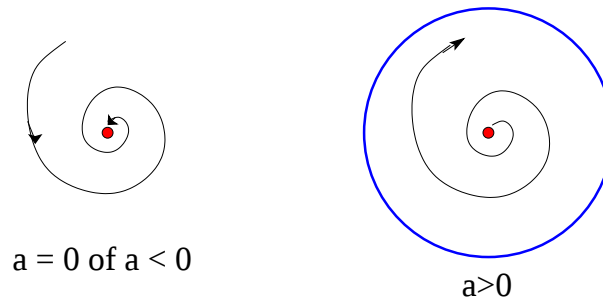
De eigenwaarden van de matrix Jacobimatrix in $(0,0)$, J , zijn: $\lambda_{1,2} = a \pm i$. Dus we kunnen de volgen gevallen onderscheiden. $a > 0$: Instabiel spiraalpunt/focus.

$a < 0$: Asymptotisch stabiel spiraalpunt/focus.

$a = 0$: In het lineair geval een centrum, dus stabiel. In het niet-lineaire geval een focus of centrum; stabiliteit niet te bepalen uit deze lineaire analyse. De vergelijking $\dot{r} = r(a - r^2)$, laat zien dat voor $a = 0$ de oorsprong een asymptotisch stabiel spiraalpunt is in het niet-lineaire systeem.

d) Een periodieke oplossing correspondeert met een gesloten baan. Uit de vergelijking $\dot{r} = r(a - r^2)$ volgt dat dit alleen kan gebeuren als $r = \sqrt{a}$. Dit betekent dat $a > 0$ moet zijn. De periodieke oplossing is STABIEL. Dit volgt meteen uit het tekenoverzicht van $\dot{r}$. Als $r > \sqrt{a}$ dan is $\dot{r} < 0$ en als $0 < r < \sqrt{a}$ dan is $\dot{r} > 0$, dus altijd beweging naar $r = \sqrt{a}$. Je mag ook stelling van Poincaré-Bendixson aanroepen. Als $a \leq 0$ is oorsprong een asymptotisch stabiel spiraalpunt.

e)



5. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking voor de functies $x = x(t)$ en $y = y(t)$ met $t \in J$ en J een interval in $\mathbb{R}$:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t), \quad x(0) = x_0; \quad \frac{dy}{dt} = G(y, t), \quad y(0) = x_0. \quad (9)$$

Neem aan dat $x(t)$ en $y(t)$ 2 oplossingen zijn van (9) en dat de functies F, G continu zijn op $D \times J$ met $D \subset \mathbb{R}$. Zij $F(x, t)$ Lipschitz continu, d.w.z. $|F(x_1, t) - F(x_2, t)| < K|x_1 - x_2|$ voor $K > 0$ en alle $x \in D$ en $t \in J$. Verder nemen we aan dat de functies F en G voor een zekere $\epsilon > 0$ voldoen aan:

$$|F(x, t) - G(x, t)| < \epsilon$$

- a. (3) Laat zien, door gebruik te maken van (9), dat voor $t \geq 0$ geldt

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_0^t K|x(s) - y(s)| ds + \int_0^t \epsilon ds.$$

- b. (2) Definieer $u(t) = |x(t) - y(t)|$ en leid hieruit voor $t \geq 0$ de volgende ongelijkheid af

$$u(t) + \frac{\epsilon}{K} \leq \frac{\epsilon}{K} + K \int_0^t \left(u(s) + \frac{\epsilon}{K} \right) ds.$$

- c. (3) *Bonusopgave:* Laat zien dat uit b) volgt dat

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\epsilon}{K} (e^{K|t|} - 1).$$

Answer:

Integreer differentiaalvergelijkingen (9) naar t .

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(x, s) ds, \quad y(t) = x_0 + \int_0^t G(y, s) ds.$$

Van elkaar aftrekken:

$$|x(t) - y(t)| = \left| \int_0^t [F(x, s) - G(y, s)] ds \right| \leq \int_0^t |F(x, s) - G(y, s)| ds.$$

Schrijf nu

$$|F(x, s) - G(y, s)| = |F(x, s) - F(y, s) + F(y, s) - G(y, s)| \leq |F(x, s) - F(y, s)| + |G(y, s) - F(y, s)|.$$

Dit invullen in de bovenstaande ongelijkheid en gebruiken dat $|F(x, t) - F(y, t)| < K|x - y|$ en $|F(y, s) - G(y, s)| < \epsilon$ levert direct de gevraagde ongelijkheid.

b) Ongelijkheid b) is feitelijk dezelfde als ongelijkheid a). Tel aan beide zijden $\frac{\epsilon}{K}$ op in a) en het gevraagde volgt.

c) We gebruiken het resultaat uit b) en nemen aan dat $t \geq 0$. Het geval $t < 0$ gaat net zo. Net als bij het bewijs van de ongelijkheid van Gronwall definiëren we $w(t) = \int_0^t (u(s) + \frac{\epsilon}{K}) ds$. De ongelijkheid bij b) luidt dan

$$\frac{dw}{dt} \leq \frac{\epsilon}{K} + Kw(t).$$

Dit kunnen we herschrijven door links en rechts te vermenigvuldigen met e^{-Kt} als

$$e^{-Kt} \left[\frac{dw}{dt} - Kw(t) - \frac{\epsilon}{K} \right] \leq 0.$$

Dit kun je ook schrijven als

$$\frac{d}{dt} \left[we^{-Kt} + e^{-Kt} \frac{\epsilon}{K^2} \right] \leq 0.$$

Nu volgt meteen

$$w(t)e^{-Kt} + e^{-Kt} \frac{\epsilon}{K^2} \leq \frac{\epsilon}{K^2},$$

omdat $w(0) = 0$.

Dus

$$w(t) \leq \frac{\epsilon}{K^2} (e^{Kt} - 1)$$

Omdat $u(t) \leq Kw(t)$ volgt nu het gevraagde.