

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Beschrijf bij elke opgave precies hoe u aan uw antwoord gekomen bent. Niet gemotiveerde antwoorden worden niet beloond.

1. Gegeven het niet-lineaire systeem

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= \alpha \sin(\pi u) + 2(\dot{\alpha} - \alpha^2)u, \\ y &= (\alpha + \dot{\alpha})(\dot{\alpha} + u).\end{aligned}$$

- (a) Schrijf het systeem als $\dot{x} = f(x, u)$ en $y = h(x, u)$ met $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, waarbij $x_1 = \alpha$ en $x_2 = \dot{\alpha}$.
- (b) Toon aan dat het paar $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, voldoet aan $\dot{x} = f(x, u)$.
- (c) Lineariseer de toestands- en uitgangsvergelijking rond het oplossingspaar gegeven in onderdeel (b).
- (d) Is de overdrachtsfunctie van het gelineariseerde systeem 'improper', 'proper' of 'strictly proper'? Licht het antwoord toe.

2. Beschouw het lineaire systeem

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

met

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 1 \quad 1),$$

waarbij β_1, β_2 en β_3 reële parameters zijn.

- (a) Toon aan dat het systeem bestuurbaar is dan en slechts dan als geldt

$$\beta_1 \neq \beta_2, \quad \beta_1 \neq \beta_3, \quad \beta_2 \neq \beta_3.$$

- (b) Bepaal de generalisatie van de bovenstaande bestuurbaarheidsvoorwaarde in geval dat A een $n \times n$ diagonaal matrix, B een $n \times 1$ matrix en C een $1 \times n$ matrix is van de volgende gedaante

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1),$$

waarbij $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ reële parameters zijn. Geef een duidelijke uitleg van de gevonden voorwaarde.

3. Beschouw het lineaire systeem:

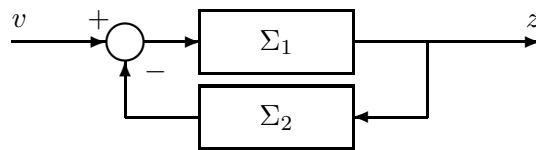
$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

met:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Toon aan dat het systeem niet bestuurbaar is, maar wel stabiliseerbaar en waarneembaar.
- Bepaal een matrix F zodat alle eigenwaarden van $A + BF$ een negatief reëel deel hebben. Geef duidelijk aan waar de eigenwaarden van $A + BF$ in het antwoord komen te liggen.
- Bepaal een matrix K zodat de eigenwaarden van $A - KC$ op $-1, -2$ en -3 liggen.
- Combineer de resultaten uit (b) en (c) tot een dynamische compensator zodat de combinatie van het systeem en de compensator eigenwaarden heeft met een negatief reëel deel.

4. Beschouw het volgende teruggekoppelde systeem Σ :



De overdrachtsfunctie van Σ_1 is:

$$h_1(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha s - 1},$$

waarbij α een reële constante is. De toestandsbeschrijving van Σ_2 is:

$$\dot{x} = -x + 3u, \quad y = 2x.$$

- Wat is de overdrachtsfunctie van het systeem Σ_2 ? Wat is de overdrachtsfunctie (van v naar z) van het systeem Σ ?
- Geef een toestandsbeschrijving van het systeem Σ .
- Voor welke waarde(n) van α hebben alle polen van de overdrachtsfunctie van Σ een negatief reëel deel?

5. Beschouw de volgende beweringen:

- (a) *De bestuurbare deelruimte van het lineaire systeem $\dot{x} = Ax + Bu$ is een A^2 -invariante deelruimte.*
- (b) *Als het paar (C, A) waarneembaar is, dan geldt dit ook voor het paar (C, A^3) .*
- (c) *De polen van de overdrachtsmatrix van het continue-tijd systeem $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, met A, B en C matrices van geschikte afmetingen, vallen niet altijd volledig samen met de eigenwaarden van de matrix A .*
- (d) *Als het discrete-tijd systeem $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, $y(k) = Cx(k)$, met A, B en C matrices van geschikte afmetingen, instabiel is, dan is de absolute waarde (=modulus) van iedere eigenwaarde van A groter dan één.*

Ga voor ieder van de bovenstaande beweringen na of ze al dan niet waar zijn. Maak uw antwoord aannemelijk door middel van een eenvoudige redenering/berekening of een eenvoudig (tegen)voorbeeld.

Puntenverdeling

opgave	1	2	3	4	5
punten	1.5	2.0	2.0	1.5	2.0

Het cijfer voor het tentamen is de som van de behaalde punten plus één.

Het eindcijfer voor het vak is het totaal van

80% van het cijfer voor het tentamen
20% van het cijfer voor de case
de eventuele bonus voor het huiswerk
met een maximum van een 10.