

1. (a) $f(x, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \sin(\pi u) + 2(x_2 - x_1^2)u \end{pmatrix}$ en $h(x, u) = (x_1 + x_2)(x_2 + u)$.
 (b) Laat zien dat $\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = 0$ en dat $f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = 0$.
 (c) $A = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}, \tilde{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$,
 $C = \frac{\partial h}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $D = \frac{\partial h}{\partial u}(\tilde{x}, \tilde{u}) = 1$.
 (d) De overdrachtsfunctie is $C(sI - A)^{-1}B + D$ is proper omdat $D \neq 0$.
2. (a) Er zijn diverse antwoorden mogelijk. Bijvoorbeeld, $\det R = (\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)$ waarbij $R = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix}$. Dus, het systeem is bestuurbaar $\iff \text{rang } R = 3 \iff \det R \neq 0 \iff \beta_1 \neq \beta_2, \beta_1 \neq \beta_3, \beta_2 \neq \beta_3$. Een alternatief is via de Hautus test, zie ook (b).
 (b) Ga na dat $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ de eigenwaarden van matrix A zijn. Met de Hautus test volgt nu dat het systeem bestuurbaar is $\iff \text{rang}(A - \beta_i I, B) = n$ voor alle $i = 1, 2, \dots, n$.
 Voor (bijvoorbeeld) $i = 1$ volgt dat $(A - \beta_1 I, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \beta_2 - \beta_1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n - \beta_1 & 1 \end{pmatrix}$.
 Het is eenvoudig in te zien dat $\text{rang}(A - \beta_1 I, B) = n \iff \beta_1 \neq \beta_j$ voor alle $j = 1, 2, \dots, n$ met $j \neq 1$. Op analoge wijze volgt dat $\text{rang}(A - \beta_i I, B) = n \iff \beta_i \neq \beta_j$ voor alle $j = 1, 2, \dots, n$ met $j \neq i$. Hiermee volgt dat het systeem bestuurbaar is $\iff \beta_i \neq \beta_j$ voor alle $i, j = 1, 2, \dots, n$ met $i \neq j$.
3. (a) Er zijn verschillende manieren om te antwoorden. Bijvoorbeeld, $n = 3$ en de verzameling van eigenwaarden van matrix A is $\{0, -2, -3\}$. Ga na dat $\text{rang}(A - \lambda I, B) < n$ voor $\lambda = -2$. Met de Hautus test volgt dat het systeem niet bestuurbaar is.
 Ga na dat $\text{rang}(A - \lambda I, B) = n$ voor alle eigenwaarden λ met niet-negatief reëel deel, dus hier voor $\lambda = 0$. Met de Hautus test volgt dat het systeem stabiliseerbaar is.
 Ga na dat $\text{rang} \begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix} = n$ voor alle eigenwaarden λ . Met de Hautus test volgt dat het systeem waarneembaar is.
 (b) Met $F = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ heeft $A + BF$ eigenwaarden op $-2, -1 \pm i$.
 (c) Met $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heeft $A - KC$ eigenwaarden op de gevraagde plaatsen.
 (d) Zie (5.10) in het boek.

4. (a) De overdrachtsfunctie van Σ_2 is $\frac{6}{s+1}$. De overdrachtsfunctie van Σ is $\frac{s+1}{s^3+(\alpha+1)s^2+(\alpha-1)s+5}$.
 (b) Een toestandsbeschrijving wordt gegeven door $\dot{x} = Ax + Bv, z = Cx$ met

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1-\alpha & -\alpha-1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Met de Routh test volgt dat voor $\alpha > \sqrt{6}$ alle polen van de overdrachtsfunctie van Σ een negatief reëel deel hebben. Voor geen enkele α treedt pole-zero cancellation op.
5. (a) Noteer $R = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$. De bestuurbare deelruimte $\text{im } R$ is een A -invariante deelruimte, d.w.z. als $v \in \text{im } R$, dan ook $Av \in \text{im } R$. Maar dan ook $A^2v \in \text{im } R$. Dus de bestuurbare deelruimte is A^2 -invariant. De bewering is dus waar.
- (b) De bewering is niet waar. Neem $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dan is het paar (C, A) waarneembaar, maar dat geldt niet voor het paar (C, A^3) (ga na dat A^3 de nulmatrix is).
- (c) De bewering is waar. Neem $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. De overdrachtsmatrix is $\frac{1}{s+3}$ met een pool op -3 , terwijl de eigenwaarden van de matrix A liggen op -2 en -3 . De polen vallen dus niet volledig samen met de eigenwaarden.
- (d) De bewering is niet waar. Neem $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, dan heeft slechts één eigenwaarde van A een modulus groter dan één, terwijl het discrete-tijd systeem toch instabiel is. Ga maar na wat er met $x(k)$ gebeurt voor $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $u(k) = 0$ voor alle $k \geq 0$.