

Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen TW2070
Maandag 27 juni 2016, 13.30 – 16.30 uur.

Aandachtspunten:

1. Op elk blaadje dat ingeleverd wordt, dienen tenminste naam en studienummer vermeld te worden. Geef ook duidelijk aan onder welke vakcode het resultaat moet worden geadministreerd.
2. Het gebruik van de Laplace transformatie tabel en de Fourier transformatie tabel is toegestaan. Deze tabellen zijn toegevoegd aan dit tentamen.
3. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven. Voor elke opgave kunnen 10 punten behaald worden. Cijfer tentamen = aantal behaalde punten gedeeld door 4. Bij de onderdelen van de opgaven staat aangegeven hoeveel punten voor dat onderdeel behaald kan worden.

Opgave 1:

Beschouw het volgende begin-randwaarde probleem voor de twee keer continu differentieerbare functie $u(x, t)$:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + Q(x, t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\u_x(0, t) &= 0, & t \geq 0, \\u_x(L, t) &= A, & t \geq 0, \\u(x, 0) &= g(x), & 0 < x < L,\end{aligned}$$

waarin $Q(x, t)$ en $g(x)$ voldoende gladde functies zijn, en waarin L en A constanten zijn.

- 1 pt a) Geef een fysische interpretatie van het begin-randwaarde probleem.
- 2 pt b) Neem $Q(x, t)$ gelijk aan de constante B . Bepaal de evenwichtsoplossing (d.w.z. bepaal u voor $t \rightarrow \infty$) voor die waarden van A en B waarvoor een evenwichtsoplossing bestaat.
- 2 pt c) Neem $A = 0$ en $Q = 0$. Bepaal $u(x, t)$.
- 2 pt d) Omschrijf hoe de oplossing van het begin-randwaarde probleem (voor willekeurige A en $Q(x, t)$) bepaald kan worden met behulp van het antwoord bij c). De oplossing hoeft niet berekend te worden, maar geef duidelijk aan hoe je de oplossing zou kunnen berekenen (methodebeschrijving wordt hier gevraagd).
- 3 pt e) Toon aan dat het begin-randwaarde probleem hoogstens één oplossing heeft (uniciteitsbewijs).

Opgave 2:

Beschouw het volgende begin-randwaarde probleem voor de twee keer continu differentieerbare functie $u(x, t)$:

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\u_x(0, t) &= au(0, t) + bu_t(0, t) + h(t), & t \geq 0, \\u(x, 0) &= f(x), & x > 0, \\u_t(x, 0) &= g(x), & x > 0,\end{aligned}$$

waarin h, f , en g voldoende gladde functies zijn, en waarin a en b niet-negatieve constanten zijn.

- 1pt a) Geef een fysische interpretatie van het probleem.
- 3 pt b) Neem $h \equiv 0$, $g \equiv 0$ en $a = 0$. De algemene oplossing van de partiële differentiaalvergelijking luidt:
 $u(x, t) = F(x - t) + G(x + t)$.
 Bepaal m.b.v. deze algemene oplossing de oplossing van het begin-randwaarde probleem.
- 3 pt c) Neem $h \equiv 0$, $f \equiv 0$, $a = 0$, en $b = 0$. Breid het probleem uit tot een probleem op $-\infty < x < \infty$, en bepaal vervolgens m.b.v. de Fourier-transformatie methode de functie $u(x, t)$.
- 3 pt d) Neem $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, $a = 0$ en $b = 0$. Bepaal m.b.v. de Laplace- transformatie methode de functie $u(x, t)$.

Opgave 3:

Beschouw het volgende randwaarde probleem voor de twee keer continu differentieerbare functie $u(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= Q(x, y, z), & x > 0, y > 0, z > 0, \\ u_x(0, y, z) &= 0, & y > 0, z > 0, \\ u_y(x, 0, z) &= 0, & x > 0, z > 0, \\ u(x, y, 0) &= h(x, y), & x > 0, y > 0, \end{aligned}$$

waarin h en Q voldoende gladde functies zijn.

- 1 pt a) Geef een fysische interpretatie van het probleem.
- 4 pt b) De Greense functie voor de Laplace operator in $\mathbb{R}^3$ is $G(\underline{x}; \underline{x}_0) = \frac{-1}{4\pi |\underline{x} - \underline{x}_0|}$.
 Bepaal de Greense functie voor dit randwaarde probleem.
- 5 pt c) Bepaal $u(x, y, z)$.

Opgave 4:

Beschouw het volgende beginwaarde probleem voor de continu differentieerbare functie $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} u_t + (1 - 2u)u_x &= 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) &= \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{voor } x < 0, \\ 1 & \text{voor } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

- 1 pt a) Geef een (fysische) interpretatie van het probleem.
- 9 pt b) Bepaal $u(x, t)$, en verduidelijk in figuren hoe de oplossing zich in de tijd ontwikkelt.

FOURIER TRANSFORM

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$	$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$	Reference
$e^{-\alpha x^2}$ $\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-x^2/4\beta}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} e^{-\omega^2/4\alpha}$ $e^{-\beta\omega^2}$	Gaussian (Section 10.3.3)
$\frac{\partial f}{\partial t}$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial F}{\partial t}$ $-i\omega F(\omega)$ $(-i\omega)^2 F(\omega)$	Derivatives (Section 10.4.2)
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) g(x - \bar{x}) d\bar{x}$	$F(\omega) G(\omega)$	Convolution (Section 10.4.3)
$\delta(x - x_0)$	$\frac{1}{2\pi} e^{i\omega x_0}$	Dirac delta function (Exercise 10.3.18)
$f(x - \beta)$	$e^{i\omega\beta} F(\omega)$	Shifting theorem (Exercise 10.3.5)
$xf(x)$	$-i \frac{dF}{d\omega}$	Multiplication by x (Exercise 10.3.8)
$\frac{2\alpha}{x^2 + \alpha^2}$	$e^{- \omega \alpha}$	Exercise 10.3.7
$f(x) = \begin{cases} 0 & x > a \\ 1 & x < a \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \frac{\sin a\omega}{\omega}$	Exercise 10.3.6

DOUBLE-FOURIER TRANSFORM

$f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega \cdot r} d\omega_1 d\omega_2$	$F(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{i\omega \cdot r} dx dy$	Reference
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ $\nabla^2 f$	$-i\omega_1 F(\omega), -i\omega_2 F(\omega)$ $-\omega^2 F(\omega)$	Derivatives (Section 10.6.5)
$\frac{\pi}{\beta} e^{-r^2/4\beta}$	$e^{-\beta\omega^2}$	Gaussian (Section 10.6.5)
$f(r - \beta)$	$e^{i\omega \cdot \beta} F(\omega)$	Exercise 10.6.8
$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r_0) g(r - r_0) dx_0 dy_0$	$F(\omega) G(\omega)$	Convolution (Exercise 10.6.7)

TABLE 13.2.1: Laplace Transforms (short table of formulas and properties)

	$f(t)$	$F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$	
Elementary functions (Exercises 13.2.1 and 13.2.2)	1	$\frac{1}{s}$	(13.2.2a)
	$t^n (n > -1)$	$n!s^{-(n+1)}$	(13.2.2b)
	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	(13.2.2c)
	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	(13.2.2d)
	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	(13.2.2e)
	$\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$	(13.2.2f)
Fundamental properties (Section 13.2.3 and Exercise 13.2.3)	$\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}$	(13.2.2g)
	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$	(13.2.2h)
	$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0) - \frac{df}{dt}(0)$	(13.2.2i)
	$-tf(t)$	$\frac{dF}{ds}$	(13.2.2j)
	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	(13.2.2k)
	$H(t-b)f(t-b)$	$e^{-bs}F(s) \quad (b > 0)$	(13.2.2l)
Convolution (Section 13.2.4)	$\int_0^t f(t-\bar{t})g(\bar{t}) d\bar{t}$	$F(s)G(s)$	(13.2.2m)
Dirac delta function (Section 13.2.4)	$\delta(t-b)$	$e^{-bs} \quad (b \geq 0)$	(13.2.2n)
Inverse transform (Section 13.7)	$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds$	$F(s)$	(13.2.2o)
Miscellaneous (Exercise 13.2.9)	$t^{-1/2}e^{-a^2/4t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-a\sqrt{s}} \quad (a \geq 0)$	(13.2.2p)
	$t^{-3/2}e^{-a^2/4t}$	$\frac{2\sqrt{\pi}}{a}e^{-a\sqrt{s}} \quad (a > 0)$	(13.2.2q)