

Dit tentamen bestaat uit meerkeuzevragen, 1–9, en open vragen, 10–15.
Noteer de antwoorden op de meerkeuzevragen in een nette tabel op het tentamenpapier.

Meerkeuzevragen

Elke meerkeuzevraag heeft precies één juist antwoord; het antwoord geven volstaat.

- (1) 1. Laat A , B en C propositieletters zijn. Neem aan dat $A \Leftrightarrow B$ waarheidswaarde T heeft. Bepaal welke van de volgende beweringen **waar** is.
- (a) De waarheidswaarde van $A \vee C \Rightarrow B \vee C$ kan niet bepaald worden.
 - (b) De waarheidswaarde van $A \wedge C \Rightarrow B \wedge C$ kan niet bepaald worden.
 - (c) De waarheidswaarde van $\neg A \wedge C \Rightarrow B \wedge C$ kan niet bepaald worden.
 - (c) Geen antwoord in onderdelen (a), (b) en (c) is waar.
- (1) 2. Bepaal welke van de volgende beweringen is **niet waar** over de propositielogica L :
- (a) Als L consistent is dan is elke tautologie bewijsbaar.
 - (b) Als L inconsistent is dan is elke tautologie bewijsbaar.
 - (c) Als L consistent is dan is er een wf die niet bewijsbaar is.
 - (d) Als L consistent is dan geldt voor elke wf $\mathcal{B}$: of $\mathcal{B}$ of $\neg\mathcal{B}$ is bewijsbaar is.
- (1) 3. Laat M een model van eerste-orde theorie K en $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ twee wfs zijn. Bepaal welke van de volgende beweringen **waar** is:
- (a) Als $\models_M \mathcal{B}$ dan $\not\models_K \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$.
 - (b) Als $\vdash_K \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ dan $\vdash_K \mathcal{B}$ of $\vdash_K \mathcal{C}$.
 - (c) Als $\vdash_K \mathcal{B}$ en $\models_M \mathcal{C}$ dan $\models_M \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$.
 - (d) Geen antwoord in onderdelen (a), (b) en (c) is waar.
- (1) 4. Gegeven de formule $((\forall x_3)A_1^2(x_1, a_1)) \Rightarrow ((\exists x_2)A_2^2(x_3, x_1))$. Bepaal welke term is **wel** vrij voor x_1 in deze formule:
- (a) $f_1^3(a_1, x_1, x_2)$
 - (b) $f_2^3(x_1, x_2, x_3)$
 - (c) $f_3^3(x_1, a_1, a_2)$
 - (d) $f_4^3(x_3, a_2, a_1)$

Zie ook de volgende bladzijde.

- (1) 5. Zij $\mathcal{B}$ een wf van een eerste-orde theorie T . Bepaal welke van de volgende beweringen **waar** is:
- (a) Als $\mathcal{B}$ logisch geldig is dan is $\mathcal{B}$ bewijsbaar in T .
 - (b) Als $\mathcal{B}$ logisch geldig is dan is volgens de Onvolledigheidsstelling van Gödel de theorie T inconsistent.
 - (c) Als $\mathcal{B}$ niet bewijsbaar in T is dan is volgens de Onvolledigheidsstelling van Gödel de theorie T niet volledig.
 - (d) Als $\mathcal{B}$ bewijsbaar in T is dan is volgens de Volledigheidsstelling van Gödel de theorie T volledig.
- (1) 6. Zij T een consistente eerste-orde theorie. We nemen aan dat M en N modellen van T zijn. Bepaal welke van de volgende beweringen **waar** is:
- (a) Als T $\aleph_0$ -categorisch is dan zijn M en N aftelbaar.
 - (b) Elke twee aftelbare modellen van T zijn elementair equivalent.
 - (c) Elke twee isomorfe modellen van T zijn elementair equivalent.
 - (d) Als M een deelmodel van N is dan is M elementair equivalent met N .
- (1) 7. Zij $\mathcal{F}$ een vrij ultrafilter op ω , en A en B willekeurige oneindige deelverzamelingen van ω . Bepaal welke van de volgende beweringen **waar** is:
- (a) Als $A \cap B \in \mathcal{F}$ dan geldt $A \setminus B \notin \mathcal{F}$.
 - (b) Als $A \cap B \notin \mathcal{F}$ dan geldt $A \notin \mathcal{F}$ en $B \notin \mathcal{F}$.
 - (c) Als $A \cap B \notin \mathcal{F}$ dan geldt $A \cup B \notin \mathcal{F}$.
 - (d) Als $A \cap B \notin \mathcal{F}$ dan geldt $A \cup B \in \mathcal{F}$.
- (1) 8. Neem aan dat x infinitesimaal is, en ongelijk aan 0, en beschouw $\frac{\sin x}{x}$. Bepaal welke van de volgende beweringen **waar** is:
- (a) $\frac{\sin x}{x}$ is onbepaald
 - (b) $\frac{\sin x}{x}$ is oneindig groot
 - (c) $\frac{\sin x}{x}$ is oneindig dicht bij 1 maar ongelijk aan 1
 - (d) $\frac{\sin x}{x}$ is gelijk aan 1
- (1) 9. Zij $\mathcal{R}^*$ een niet-standaardmodel van $\mathcal{R}$, waarbij $\mathcal{R}$ het standaardmodel van de reële rechte is. Zij $A \subseteq \mathbb{R}$. Bepaal welke van de volgende beweringen **niet waar** is:
- (a) Als A aftelbaar en begrensd is dan is $A = A^*$.
 - (b) Als $A \neq A^*$ dan is A oneindig.
 - (c) Als $A = A^*$ dan is A begrensd.
 - (d) Als A eindig is dan $A = A^*$.

Open vragen

Het antwoord op elke open vraag moet **volledig** beargumenteerd worden.

- (2) 10. In deze vraag beschouwen we de propositielogica. Bepaal of het volgende argument logisch geldig is. Geef alle benodigde details.
Als f continu is dan is f integreerbaar. f is niet differentieerbaar maar wel continu. Hieruit volgt dat f niet integreerbaar is.

- (2) 11. We beschouwen de propositielogica. Bewijs dat de enige twee binaire connectieven, die op zichzelf adequaat zijn, $\mid$ (alternative denial) en $\downarrow$ (joint denial) zijn.

12. We beschouwen propositielogica.

- (1) a. Bewijs met behulp van de axioma's dat voor elke wf $\mathcal{B}$ geldt

$$\vdash_L \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}.$$

- (1) b. Formuleer de Deductiestelling.

- (2) c. Bewijs de Deductiestelling.

- (2) 13. Onderzoek met behulp van een semantische boom of de volgende wf van een eerste-orde theorie logisch geldig is:

$$(\forall x)(\mathcal{B}(x) \Rightarrow \mathcal{C}(x)) \Rightarrow ((\exists x)(\mathcal{B}(x)) \Rightarrow (\exists x)\mathcal{C}(x)).$$

14. Beschouw de theorie van de rekenkunde (d.w.z., de theorie van de natuurlijke getallen met Peano axioma's).

- (2) a. Bewijs met behulp van de compactheidsstelling dat een niet-standaard model van de theorie van de rekenkunde bestaat.

- (2) b. Zij $\mathcal{F}$ een vrij ultrafilter op ω . Construeer met behulp van een ultramacht een niet-standaard model van de rekenkunde.

- (1) c. Bewijs dat de niet-standaard modellen geconstrueerd in (a) en (b) inderdaad niet isomorf zijn met het standaard model van de rekenkunde $\mathcal{N}$.

- (3) 15. Geef een niet-standaard bewijs van de volgende bewering:

Elke continue functie op een gesloten en begrensd interval in $\mathbb{R}$ is uniform continu.

Zie ook de volgende bladzijde.

Axioma's voor de propositielogica L :

Als $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ wfs zijn dan zijn de volgende wfs axioma's van L :

$$(A1) \quad (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}))$$

$$(A2) \quad ((\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D})))$$

$$(A3) \quad (((\neg \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg \mathcal{B})) \Rightarrow (((\neg \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}))$$

De enige afleidingsregel (rule of inference) is modus ponens:

Uit $\mathcal{B}$ en $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ volgt $\mathcal{C}$.

Axioma's voor de predicaatlogica K :

Als $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ wfs in $\mathcal{L}$ zijn dan zijn de volgende wfs logische axioma's van K :

$$(A1) \quad \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B})$$

$$(A2) \quad ((\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D})))$$

$$(A3) \quad (\neg \mathcal{C} \Rightarrow \neg \mathcal{B}) \Rightarrow ((\neg \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C})$$

$$(A4) \quad (\forall x_i) \mathcal{B}(x_i) \Rightarrow \mathcal{B}(t) \text{ als } \mathcal{B}(x_i) \text{ een wf van } \mathcal{L} \text{ is en } t \text{ een term van } \mathcal{L} \text{ die vrij voor } x_i \text{ in } \mathcal{B}(x_i) \text{ is}$$

$$(A5) \quad (\forall x_i)(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow (\forall x_i)\mathcal{C}) \text{ als } \mathcal{B} \text{ geen vrije voorkomens van } x_i \text{ bevat}$$

Proper axioma's zijn afhankelijk van de eerste-orde theorie.

De volgende wfs zijn axioma's van eerste-orde theorie met gelijkheid:

$$(A6) \quad (\forall x_1) x_1 = x_1$$

$$(A7) \quad x = y \Rightarrow (\mathcal{B}(x, x) \Rightarrow \mathcal{B}(x, y))$$

Afleidingsregels (Rules of Inference) van elke eerste-orde theorie zijn:

Modus ponens: $\mathcal{C}$ volgt uit $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$

Generalizatie: $(\forall x_i)\mathcal{B}$ volgt uit $\mathcal{B}$

De punten voor elke opgave staan in de kantlijn. Tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{(\sum \text{punten}) + 3}{30}$$

en afgerond op halve cijfers.

EINDE