

Dit tentamen bestaat uit meerkeuzevragen, 1–9, en open vragen, 10–16.
Noteer de antwoorden op de meerkeuzevragen in een nette tabel op het tentamenpapier.
Bij de meerkeuzevragen is telkens één van de mogelijkheden correct.
Bij de open vragen moeten de antwoorden volledig beargumenteerd worden.

..... **Meerkeuzevragen**

- (2) 1. Welke van de volgende wfs is **geen** conjunctieve normaalvorm van $(A \vee B) \Rightarrow C$:
- $(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$
- $\Rightarrow$ **b.** $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$
- $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$
 - $(\neg A \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$
- (2) 2. Welke verzameling connectieven is *niet* adequaat?
- $\{\mid\}$ ($\mid$ is ‘alternative denial’)
 - $\{\downarrow\}$ ($\downarrow$ is ‘joint denial’)
- $\Rightarrow$ **c.** $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ {als alle letters ‘true’ zijn dan is de hele bewering ‘true’}
- $\{\Rightarrow, \neg\}$
- (2) 3. De omgekeerde implicatie van de Volledigheidsstelling van de Propositielogica, L , luidt:
- $\Rightarrow$ **a.** Elke stelling van L is een tautologie {zie Propositie 1.12}
- Elke tautologie is een stelling van L
 - Een wf is een stelling van L dan en slechts dan als deze een tautologie is
 - Geen van a, b en c
- (2) 4. Gegeven de formule $((\forall x_3)A_1^2(x_1, a_1)) \Rightarrow ((\exists x_2)A_2^2(x_3, x_1))$. Welke term is **niet** vrij voor x_1 in deze formule
- $f_1^3(a_1, x_1, x_4)$
 - $f_1^3(x_1, x_4, x_5)$
- $\Rightarrow$ **c.** $f_1^3(x_1, x_2, x_3)$ { x_1 komt vrij voor in het bereik van zowel $(\forall x_3)$ als $(\exists x_2)$ }
- $f_1^3(a_1, a_2, x_4)$
- (2) 5. Een prenexnormaalvorm voor de formule $((\exists x)A_2^1(x)) \Rightarrow ((\exists y)A_3^1(y))$ is
- $\Rightarrow$ **a.** $(\forall w)(\exists z)(A_2^1(w) \Rightarrow A_3^1(z))$ {zie Lemma 2.29}
- $(\exists w)(\forall z)(A_2^1(w) \Rightarrow A_3^1(z))$
 - $(\forall w)(\forall z)(A_2^1(w) \Rightarrow A_3^1(z))$
 - $(\exists w)(\exists z)(A_2^1(w) \Rightarrow A_3^1(z))$

Zie ook de volgende bladzijde.

- (2) 6. Gegeven een consistente eerste-orde theorie T met gelijkheid, en twee *normale* modellen, M en N , van T . Welke van de volgende beweringen is waar:
- Als M en N oneindig zijn en elementair equivalent dan is er een bijectie tussen de domeinen van M en N .
 - Als M en N elementair equivalent zijn dan zijn M en N isomorf.
- $\Rightarrow$ c. Als M en N eindig zijn en elementair equivalent dan is er een bijectie tussen de domeinen van M en N .
- Geen van a, b en c.
- (2) 7. Zij $\mathcal{F}$ een *echt* filter op de verzameling $\mathbb{N}$. Welke van de volgende beweringen is waar:
- $\emptyset \in \mathcal{F}$
 - Als $\{n : n \text{ is even}\} \notin \mathcal{F}$ dan $\{n : n \text{ is oneven}\} \in \mathcal{F}$
 - $\{1\}$ en $\{2\}$ behoren beide niet tot $\mathcal{F}$
- $\Rightarrow$ d. Als $\{1\} \in \mathcal{F}$ dan ook $\{1, 2\} \in \mathcal{F}$ {Eis 3 in de definitie}
- (2) 8. Zij G de verzameling van *alle* gesloten wfs, in de taal van de elementaire getaltheorie, die waar zijn in het standaard model van de natuurlijke getallen. Welke van de volgende beweringen is waar:
- $\Rightarrow$ a. De theorie G is volledig
- De theorie G is niet volledig
 - De verzameling G is recursief opsombaar
 - De theorie G is niet consistent
- (2) 9. Welke van de volgende beweringen is waar.
- Er zijn niet-consistente theorieën met een model
 - De theorie K_2^+ van dicht lineair geordende verzamelingen met een minimum en een maximum is niet $\aleph_0$ -categorisch
 - De Eerste Onvolledigheidsstelling van Gödel impliceert dat geen eerste-orde theorie met gelijkheid volledig is
- $\Rightarrow$ d. De lineair geordende verzameling $\mathbb{Q}$ is elementair equivalent met $\mathbb{R}$, maar niet isomorf met $\mathbb{R}$

..... **Open vragen**

- (3) 10. a. Ga na of er een afleiding is, in de theorie L van de propositiecalculus, van de wf

$$(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{C}$$

en leg uit waarom zo'n afleiding er (niet) is.

- (3) b. Geef een afleiding, in L , van

$$\neg \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$$

Gebruik eventueel de Deductiestelling voor L .

11. Beschouw de volgende uitspraak: "als een product van twee natuurlijke getallen even is dan is ten minste één van de twee getallen even".

- (3) a. Geef deze uitspraak weer als een wf in de Propositielogica; geef alle details.
- (3) b. Geef deze uitspraak weer als een wf in een geschikte eerste-ordetaal; geef expliciet de constanten, functieletters en predicaten die nodig zijn.

Zie ook de volgende bladzijde.

12. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal met drie unaire predicaten, A_1^1 , A_2^1 en A_3^1 .
- (3) a. Hoeveel elementen moet het domein van een interpretatie minimaal hebben waarin de twee wfs
- $$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \Rightarrow A_2^1(x_1)) \wedge (\forall x_1)(A_2^1(x_1) \Rightarrow A_3^1(x_1))$$
- en
- $$(\exists x_1)(A_2^1(x_1) \wedge \neg A_1^1(x_1)) \wedge (\exists x_1)(A_3^1(x_1) \wedge \neg A_2^1(x_1))$$
- gelijktijdig geldig kunnen zijn? Geef ook een interpretatie met dat minimale aantal elementen.
- (3) b. Voeg aan de wfs uit het vorige onderdeel nog een wf toe, zó dat elke interpretatie, waarin de resulterende drie wfs geldig zijn, ten minste vier elementen moet hebben, en maak daarbij ook een interpretatie met vier elementen.
- (4) 13. Geef een afleiding van
- $$(\forall x)(\mathcal{B}(x) \Rightarrow \mathcal{C}(x)) \Rightarrow ((\exists x)\mathcal{B}(x) \Rightarrow (\exists x)\mathcal{C}(x))$$
- Bij gebruik van extra bewijsregels als de Deductiestelling, regel C, ... moet duidelijk aangegeven worden waarom die regels gebruikt mogen worden, en waar.
14. Gegeven de wf $((\forall x_1)(A_1^1(x_1) \Rightarrow A_2^1(x_1))) \Rightarrow ((\forall x_1)A_1^1(x_1) \Rightarrow (\forall x_1)A_2^1(x_1))$.
- (3) a. Ga na, met behulp van een semantische boom, of de wf logisch geldig is.
- (3) b. Ga ook na of de omgekeerde implicatie, $((\forall x_1)A_1^1(x_1) \Rightarrow (\forall x_1)A_2^1(x_1)) \Rightarrow ((\forall x_1)(A_1^1(x_1) \Rightarrow A_2^1(x_1)))$, logisch geldig is.
- (1) 15. a. Zij $\langle a_n \rangle_n$ een rij reële getallen en $c \in \mathbb{R}$. Geef een niet-standaard karakterisering van $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$
- (4) b. Geef een niet-standaard bewijs van $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$.
- (3) 16. In een niet-standaard model $\mathcal{R}^*$ van de reële getallen nemen we een infinitesimaal getal x ongelijk aan 0. Bewijs of weerleg:

$$\frac{\sin^* x}{x} = 1$$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 6}{6}$$

en op de gebruikelijke wijze afgerond.

Zie ook de volgende bladzijde.

..... **Formuleblad**

Axioma's voor de propositielogica L :

Als $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ wfs zijn dan zijn de volgende wfs axioma's van L :

$$(A1) (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}))$$

$$(A2) ((\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D})))$$

$$(A3) (((\neg \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg \mathcal{B})) \Rightarrow (((\neg \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}))$$

De enige afleidingsregel (rule of inference) is modus ponens:

Uit $\mathcal{B}$ en $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ volgt $\mathcal{C}$.

Axioma's voor de predicaatlogica K :

Als $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ wfs in $\mathcal{L}$ zijn dan zijn de volgende wfs logische axioma's van K :

$$(A1) (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}))$$

$$(A2) ((\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})) \Rightarrow ((\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D})))$$

$$(A3) (((\neg \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg \mathcal{B})) \Rightarrow (((\neg \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}))$$

$$(A4) (\forall x_i) \mathcal{B}(x_i) \Rightarrow \mathcal{B}(t) \text{ als } \mathcal{B}(x_i) \text{ een wf van } \mathcal{L} \text{ is en } t \text{ een term van } \mathcal{L} \text{ die vrij voor } x_i \text{ in } \mathcal{B}(x_i) \text{ is}$$

$$(A5) (\forall x_i)(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow (\forall x_i)\mathcal{C}) \text{ als } \mathcal{B} \text{ geen vrije voorkomens van } x_i \text{ bevat}$$

Proper axioma's zijn afhankelijk van de eerste-orde theorie.

De volgende wfs zijn axioma's van eerste-orde theorieën met gelijkheid:

$$(A6) (\forall x_1) x_1 = x_1$$

$$(A7) x = y \Rightarrow (\mathcal{B}(x, x) \Rightarrow \mathcal{B}(x, y))$$

Afleidingsregels (Rules of Inference) van elke eerste-orde theorie zijn:

MP Modus ponens: $\mathcal{C}$ volgt uit $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$

Gen Generalizatie: $(\forall x_i)\mathcal{B}$ volgt uit $\mathcal{B}$

EINDE